

Interazioni Fondamentali, Gravità e Stringhe

Gianfranco Pradisi

Dipartimento di Fisica

Università di Roma Tor Vergata

Via della Ricerca Scientifica 1, I-00133 Roma (Italy)

gianfranco.pradisi@roma2.infn.it

15 gennaio 2008

Indice

1	Introduzione	3
2	Il Modello Standard	5
2.1	Forze e Particelle	5
2.2	Correzioni Quantistiche	11
2.3	Interazioni Elettrodeboli	15
2.4	Interazioni Forti	18
2.5	Problema $U(1)_A$, Anomalie ed Istantoni	22
2.6	Parametri del Modello Standard e Problemi Aperti	25
3	La Gravità	29
3.1	Relatività Generale	29
3.2	Il Modello Standard Cosmologico	33
3.3	Gravità Quantistica?	39
4	Oltre il Modello Standard	43
4.1	Technicolor	43
4.2	Teorie di Grande Unificazione (GUT)	44
4.3	Supersimmetria	51
4.4	Supergravità	56
4.5	Estensioni Supersimmetriche: Il MSSM	58
5	Le (Super)Stringhe	63
5.1	Stringhe e Particelle	67
5.2	Stringhe Supersimmetriche	73
5.3	Stringhe Aperte, Brane e Compattificazioni	76
5.4	Teoria M	91
5.5	Scenari	95
5.6	Dove Siamo?	99
A	Appendici Tecniche	101
A.1	Elementi di Teoria dei Gruppi	101
A.2	Gruppi di Lie	101
A.3	I Gruppi di Lorentz e Poincarè	104
A.4	L'Oscillatore Armonico in Meccanica Quantistica	106
A.5	Algebre di Lie e reticoli	108

A.6	Campi classici, Lagrangiane e Teorema di Nöther	108
A.7	Campo Scalare	108
A.8	Campo Spinoriale ed Equazione di Dirac	109
A.9	Campo Vettoriale	109
A.10	Teorie di Gauge	109
A.11	Teorema di Goldstone e Meccanismo di Higgs	109
A.12	Metrica del Piano e della Sfera	109
A.13	La Teoria di Kaluza-Klein	109
A.14	Abbreviazioni	109
B	Un elenco di siti internet	111
6	Riferimenti	113

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare anzitutto il Prof. A. Simone, Direttore della Scuola IAD, e la Prof. S. Morante per avermi dato l'opportunità di tenere questo Corso e di scrivere queste note.

Vorrei poi ringraziare tutti coloro che, con notevole pazienza, hanno accuratamente visionato il testo, fornendomi preziosi suggerimenti e segnalandomi errori e manchevolezze: A. Balbi, A. Lionetto, G.C. Rossi, A. Sagnotti ed in special modo Ya.S. Stanev. Infine, vorrei ringraziare P. Anastasopoulos per l'aiuto nella stesura della maggior parte delle figure.

Capitolo 1

Introduzione

Scopo della fisica è lo studio delle leggi fondamentali che regolano le interazioni tra i costituenti della materia nell'Universo. L'assunzione fondamentale, divenuta via via sempre più chiara nella misura in cui la confidenza degli scienziati verso la modellizzazione della Natura è progredita nel tempo, risiede appunto nella speranza che la realtà sia completamente "matematizzabile". Per dirla con Galileo, in sintesi, che *"il gran libro della Natura" sia scritto "in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto"*¹.

L'uomo ha sempre ambito a comprendere la struttura intima della materia alla ricerca della "teoria finale", uno schema logico-matematico unico, che consenta in linea di principio di descrivere in poche equazioni (al limite una sola) le leggi della Natura. La spinta verso "La" teoria risente, probabilmente, da un lato dell'ambizione Prometeica di dominare fino in fondo gli eventi, dall'altro della spinta monoteistica derivante dal contesto storico, politico e culturale nel quale la scienza, come tale, nasce: l'Europa del '600. Il gusto per il bello, infine, per l'estetica delle equazioni, contrariamente al senso comune, ha sempre giocato un ruolo importante. Sostiene P.A.M. Dirac, uno dei padri della Meccanica Quantistica, l'inventore dell'antimateria e degli spinori, che sia *"più importante avere la bellezza nelle equazioni che non l'aderenza bieca ai dati sperimentali... può accadere che un'equazione bella sembri non rispettare i dati soltanto per via di alcuni dettagli non ancora compresi ma che presto verranno chiariti... se si lavora nella direzione della bellezza si va senza dubbio verso il progredire della conoscenza..."*².

Il cammino nella direzione della "teoria finale" deve passare attraverso la sintesi dei dati sperimentali raccolti ed accumulati dall'uomo nel corso della storia, in particolare dalla nascita dell'indagine scientifica. Oggi, si dispone essenzialmente di due descrizioni complementari. Una, nota come Modello Standard delle interazioni elettrodeboli e forti, si basa sulla Meccanica Quantistica ed è relativa al mondo microscopico della fisica delle particelle, l'ambito nel quale la conoscenza umana ha raggiunto in assoluto i livelli di precisione più elevati. Non esistono, in principio, esperimenti che siano in contraddizione con le predizioni del Modello Standard, almeno alle energie finora esplorate pari a circa 100 miliardi di elettronvolt. La seconda, nota come Modello Standard Cosmologico, è invece basata sulla Teoria della Relatività Generale

¹G. Galilei, "Il saggiaiore", Ed. Feltrinelli, 1992

²P.A.M. Dirac, "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature", Scientific American 208 (1963), 45.

di Einstein, ed è inerente alla struttura su larga scala dell'Universo, dominata dall'interazione gravitazionale. La complementarità va intesa nel senso che nell'ambito in cui una di esse venga utilizzata, l'altra possa essere totalmente ignorata. Infatti, nello studio del mondo microscopico l'interazione gravitazionale tra particelle è talmente debole da risultare ininfluenza. D'altra parte, nello studio delle strutture cosmiche le grandi masse rendono rilevante la sola interazione gravitazionale. Il progresso nella ricerca, tuttavia, ha condotto ad analizzare situazioni che necessitano di entrambe le descrizioni: nell'Universo primordiale, ad esempio, enormi quantità di materia dovevano essere concentrate in volumi estremamente piccoli, così come in prossimità di un buco nero l'interazione gravitazionale è forte al punto tale da determinare fluttuazioni quantistiche. Del resto, la "teoria finale", per definizione, deve poter armonizzare tutte le eventuali diverse descrizioni.

Conciliare la Meccanica Quantistica con la Teoria della Relatività Generale o, come si suol dire, costruire una Teoria Quantistica della Gravità che compendi insieme le rimanenti interazioni è la sfida intellettuale attualmente più interessante e stimolante della fisica teorica. Le teorie convenzionali, basate essenzialmente sulla materia come costituita di "particelle", non sono in grado di fornire soluzioni sensate. A parere di chi scrive, l'unica proposta disponibile al momento è la teoria delle (Super)Stringhe, ovvero una sua recente generalizzazione nota come teoria M, basate su revisioni dei costituenti elementari della materia ed anche, in modo inevitabile, del numero di dimensioni dell'Universo.

Scopo di questo Corso è tentare di fornire una panoramica, dettagliata ma non tecnica, dello stato dell'arte nella formulazione di una teoria unificata di tutte le forze e le "particelle". Il 2008 sarà un anno fondamentale per la fisica delle alte energie, un anno nel quale entrerà in funzione, al CERN di Ginevra, il collisore LHC ("Large Hadron Collider"), che dovrebbe fornire risposte cruciali ai grandi interrogativi sulla fisica "oltre il Modello Standard". Molte delle idee esposte nel Corso potrebbero finalmente trovare una verifica sperimentale negli anni a venire.

Il Corso è strutturato come segue. Il capitolo 2 è dedicato ad una rassegna relativa al Modello Standard ed ai problemi irrisolti che lo riguardano. Il Capitolo 3 contiene le idee della Teoria della Relatività Generale ed una descrizione, seppur breve, del Modello Standard Cosmologico. Nel Capitolo 4 vengono discusse le proposte sul tappeto per quanto concerne la fisica "oltre il Modello Standard". Il Capitolo 5 è infine dedicato alla descrizione delle teorie di (super)stringhe e dello schema di teoria M, unitamente ai possibili scenari che ne derivano. Se realizzati in Natura, alcuni di essi potrebbero dar luogo ad effetti visibili nell'ambito dell'esperimento LHC. Il Corso è corredato da Appendici tecniche. Per alcune, considerata la semplicità e la reperibilità degli argomenti, si è scelto di rimandare lo studente alla consultazione di appositi siti internet. Una breve guida bibliografica è riportata nel Cap. 6.

*Le basi assiomatiche della fisica teorica
non possono essere dedotte dagli esperimenti,
ma devono essere liberamente inventate.*

Albert Einstein

Capitolo 2

Il Modello Standard

2.1 Forze e Particelle

In natura esistono quattro tipi di interazioni fondamentali: gravitazionali, elettromagnetiche, deboli e forti. Solo due di esse, la forza di gravità e l'elettromagnetismo, sono manifeste nella vita di tutti i giorni. Le altre due, le interazioni deboli e forti, pur essendo responsabili rispettivamente dei decadimenti radioattivi e dei legami all'interno dei nuclei atomici, sono assai meno familiari. L'interazione gravitazionale, la prima ad essere scoperta e "modellizzata" da Newton, si è paradossalmente rivelata la più resistente ad una sistemazione teorica moderna soddisfacente.

Nello studio della struttura intima della materia, la materia stessa viene descritta come formata da particelle dotate di "cariche" (le "sorgenti") che interagiscono attraverso lo scambio di altre particelle, i "portatori" (o "mediatori") delle forze. La carica in questione è dunque l'attributo che rende la particella sensibile alla forza ad essa associata. Ad esempio, la "carica" gravitazionale è la massa gravitazionale che, come sancito da Newton, coincide con la massa inerziale (vale a dire con la "resistenza" che un corpo oppone al cambiamento del suo stato di moto¹) e come provato da Einstein equivale ad una sorta di energia "intrinseca" posseduta dalla particella. Tutte le particelle interagiscono dunque gravitazionalmente. Inoltre, la gravità è una forza puramente attrattiva: non potendo essere "schermata" risulta sempre additiva. Per questo, in presenza di grandi masse ovvero di un numero molto elevato di particelle, la gravità domina sulle altre interazioni e regola la struttura su grande scala dell'Universo. Al contrario, l'osservazione delle interazioni "elementari" tra singole particelle rende manifesta l'estrema debolezza dell'interazione gravitazionale se paragonata alle altre. Un parametro molto importante che misura l'intensità di una forza è la cosiddetta "costante d'accoppiamento", la quantità che compare nei "vertici di interazione" di ogni processo in cui la forza in questione sia presente. In tabella 2.1 sono riportate le costanti d'accoppiamento delle quattro interazioni note, i relativi valori ed i loro rapporti. Come si può osservare, l'interazione gravitazionale è del tutto trascurabile in eventi in cui sia coinvolto un esiguo numero di particelle. Essa verrà dunque tralasciata nel presente capitolo e ripresa nel successivo capitolo, nell'ambito della discussione dei modelli cosmologici.

¹Si osservi quindi che la massa gravitazionale è l'equivalente in gravità della carica elettrica in elettromagnetismo, e che la sua coincidenza con la massa inerziale, il cosiddetto principio di equivalenza, è un fatto assolutamente non triviale.

Interazione	Gravitazionale	Elettromagnetica	Debole	Forte
Costante d'accopp.	$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$	$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$	$G_F = 1.16 \times 10^{-5} GeV^{-2}$	$\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi\hbar c} = 14$
Rapporto con α_S	10^{-39}	10^{-3}	10^{-13}	1
Quanto	Gravitone ?	Fotone	Bosoni W_+, W_-, Z_0	Gluoni
Massa	$m = 0?$	$m = 0$	$m \sim 90 GeV$	$m = 0$

Tabella 2.1: Le Interazioni fondamentali.

La teoria che descrive le rimanenti interazioni va sotto il nome di “Modello Standard” (MS). Si tratta della teoria di gran lunga più accurata che sia mai stata concepita. Probabilmente, non esiste settore della conoscenza umana in cui un modello possa riprodurre i dati sperimentali in maniera più dettagliata. Ad esempio, la differenza tra il valore “misurato” del momento magnetico anomalo dell’elettrone ed il valore “calcolato” in elettrodinamica quantistica è di circa 10^{-11} , una parte su cento miliardi. Il Modello Standard non ha inconsistenze interne ed è in grado, in linea di principio, di predire ogni fenomeno che coinvolga la struttura della materia, la chimica, la fisica nucleare e la fisica delle particelle fino alle energie attualmente prodotte negli esperimenti. Ovviamente, va sottolineato che tutto ciò vale in linea di principio, nel senso che esistono fenomeni complessi il cui svolgimento non si è in grado di predire con calcoli espliciti e dunque di spiegare in dettaglio. Nella comunità scientifica esistono, rozzamente parlando, due linee di pensiero. L’una (riduzionismo) che sostiene che le difficoltà siano puramente di natura “tecnica”. L’altra invece (olismo), che ritiene che fenomeni collettivi richiedano in un certo senso delle leggi fondamentali diverse (non è questa, ovviamente, la sede per intavolare una discussione di questo tipo. Si rimanda il lettore interessato, ad esempio, al corso del Prof. Giannoli). È un fatto tuttavia assai rilevante che l’ipotesi riduzionista “funzion-i”, nel senso che una così vasta classe di fenomeni, i più in apparenza disparati, possa essere “spiegata” in modo relativamente semplice. Una siffatta enorme sintesi dei dati sperimentali oggi disponibili, spinge molti fisici a “sognare” che un giorno si possa trovare la cosiddetta “Teoria del Tutto”, o “Teoria Finale”, “La” teoria che possa descrivere tutti i fenomeni noti partendo da un unico “principio fondamentale unificante”.

Il “Modello Standard” (MS) delle Interazioni Elettrodeboli e Forti è una Teoria Quantistica di Gauge. In tabella 2.2 sono riportate le particelle “elementari”² che compongono il MS.

²Queste sono le particelle ritenute oggi “elementari”. Va detto, tuttavia, che in una teoria quantistica il concetto di “particella elementare” assume un significato che dipende dall’energia: ad ogni “livello” di indagine si designano come elementari quelle entità che sembrano i costituenti elementari nel modello che descrive i relativi fenomeni. Ovviamente, si deve essere pronti a rivedere l’eventuale classificazione non appena le energie in gioco riescano ad “eccitare” stati la cui massa era in precedenza troppo al di sopra delle energie fino a quel momento utilizzate. Così, in passato, sono stati riguardati come “elementari” gli atomi, oppure i nucleoni (protoni e

Le particelle sono classificate in base ai loro “numeri quantici”, attributi che emergono dalle proprietà di simmetria delle teorie. Trascurando la gravità, le leggi della fisica devono essere “covarianti” rispetto a trasformazioni del gruppo di Poincarè (App. A.3). In altri termini, non devono cambiare per osservatori che, ad esempio, siano tra loro in moto relativo uniforme, ciascuno con il proprio orologio³. Le particelle, dunque, devono essere stati associati a campi che trasformano in rappresentazioni del gruppo stesso di Poincarè, ovvero con ben definiti valori degli operatori di Casimir della rappresentazione. In particolare, sono caratterizzate dall’aver definiti valori della massa e dello spin. L’assunzione di “località” (la proprietà secondo cui una interazione non può essere influenzata troppo da quel che avviene molto “lontano” dall’evento) impone altresì che vi sia un legame tra lo spin e la statistica obbedita dalle particelle. Particelle di spin intero risultano essere bosoni, particelle di spin semiintero fermioni. Oltre all’invarianza di Poincarè, che è una simmetria spazio-temporale, esistono delle altre simmetrie (interne), corrispondenti ad uno spazio astratto di configurazioni non legato allo spazio-tempo (esterno). Tali simmetrie, via il Teorema di Noether, generano delle altre leggi di conservazione che definiscono le cariche delle particelle, di cui la carica elettrica è un esempio. La combinazione della Meccanica Quantistica e della Teoria della Relatività Speciale, impone che ad ogni particella sia associata un’antiparticella di uguale massa e spin ma di opposte cariche.

Le interazioni vengono introdotte nel MS utilizzando il cosiddetto “principio di gauge” (App. A.10) che generalizza quello dell’elettrodinamica quantistica. Il “principio di gauge” può essere riassunto come segue: se un sistema ammette una simmetria globale (vale a dire indipendente dal punto dello spazio-tempo nel quale la trasformazione viene applicata), può essere reso invariante anche rispetto a trasformazioni che dipendono dal punto dello spazio-tempo (simmetria locale), ovvero diverse punto per punto. Tale operazione (detta “gauging” della simmetria globale), richiede che in ogni punto la diversa “trasformazione” venga compensata dalla trasformazione analoga di una diversa funzione, ovvero di un ulteriore “campo di gauge”. Tale campo si combina con la corrente conservata della simmetria globale attraverso un termine di accoppiamento minimale, che detta la forma dell’interazione. Ovviamente non è dato sapere il motivo per il quale le interazioni note in natura abbiano esattamente la forma di “accoppiamenti di gauge”, lo si può considerare un “input” sperimentale. Esso, tuttavia, funziona perfettamente. In particolare, il generatore della trasformazione globale iniziale assume il ruolo dell’operatore relativo alla carica conservata corrispondente alla trasformazione “di gauge”. Assai meravigliosamente, come scoperto da Yang e Mills negli anni ’50, la prescrizione funziona anche se il “gauging” è applicato ad un gruppo non abeliano. Il campo di gauge, in tal caso, diviene un vettore della rappresentazione aggiunta del gruppo e dunque corrisponde piuttosto ad un multipletto di campi vettoriali, i bosoni vettori, che “trasmettono” l’interazione.

Il gruppo di gauge del Modello Standard è il prodotto di tre fattori: $SU(3)_c$ di colore per le interazioni forti, $SU(2)_L$ (L sta per “left”, sinistro) per le interazioni deboli e l’ $U(1)_Y$ di ipercarica. Tale gruppo prodotto non può tuttavia essere una simmetria esatta della teoria quantistica. E’ ben noto, infatti, che nelle interazioni deboli una delle proprietà fondamentali, la cui scoperta teorica valse il premio Nobel nel 1957 a T.D. Lee e C.N. Yang e che fu verificata sperimentalmente nello stesso anno da Wu e collaboratori, è la violazione della parità. L’accoppiamento dei campi di materia ai bosoni vettori è infatti minimale ma con massima

neutroni) che ne formano il nucleo (per fenomeni fino ad energie del MeV), infine i quark all’interno dei nucleoni ad energie 100 volte superiori. In questo Corso, cercheremo di sostenere che in realtà possa esistere un livello ancor più profondo, in cui tutte le particelle siano riconducibili ad “oscillazioni” di stringhe “elementari”.

³Ovviamente si tratta di sistemi di riferimento in cui la velocità della luce è costante.

Part.	1 ^a Fam.	2 ^a Fam.	3 ^a Fam.	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_{em}$
leptoni	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	e_R	μ_R	τ_R	1	1	1	1
quark	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	3	2	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
	u_R	c_R	t_R	$\bar{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	d_R	s_R	b_R	$\bar{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
H	$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_- \end{pmatrix}$			1	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
Bosoni di Gauge	G			8	1	0	0
	Z_0, W_\pm			1	3	0	$0, \pm 1$
	γ			1	1	0	0

Tabella 2.2: Il contenuto di particelle del Modello Standard.

violazione della parità, o come si suol dire, è del tipo “V-A” (vettoriale “meno” assiale). Come conseguenza, gli stati “elementari” delle interazioni deboli sono particelle di definita “chiralità”. Per definire intuitivamente la chiralità, che come illustrato in App. A.8 è l’autovalore di γ_5 , +1 per gli stati “destri” (Right) e -1 per gli stati sinistri (Left), si può pensare al fatto che per particelle prive di massa essa coincida con l’elicità. Particelle di massa nulla possono avere solo due stati di spin e la proiezione dello spin nella direzione del moto viene detta elicità. Per particelle di massa non nulla, il concetto di elicità può essere recuperato a grandi energie, ove la massa diviene trascurabile. La chiralità delle interazioni deboli è una delle proprietà più importanti e come vedremo più “difficili” del modello standard: i bosoni intermedi dell’ $SU(2)$ si accoppiano solo alle particelle con chiralità sinistra (Left)⁴. Sia i leptoni che i quark sinistri sono infatti dei doppietti dell’ $SU(2)_L$, mentre i leptoni ed i quark destri sono singoletti, trasformano nella rappresentazione triviale del gruppo. Poichè autostati della massa sono sovrapposizioni di stati sinistri e destri, è evidente che un accoppiamento di tipo chirale può essere una simmetria esatta (e “gauged”) soltanto se le particelle di materia ed i bosoni intermedi sono privi di massa. Tuttavia sperimentalmente è noto che sia i leptoni⁵ che i quark sono massivi (il quark top, addirittura, possiede una massa pari a circa 175 volte la massa di un protone, a sua volta composto di tre quark “leggeri”), ed anche i bosoni intermedi W e Z hanno masse molto grandi, dell’ordine di 80 – 90 volte la massa del protone. Sembra dunque emergere una contraddizione che a prima vista potrebbe costringere alla rinuncia ad una descrizione tramite accoppiamento di gauge. Tuttavia, modelli in cui termini espliciti di massa vengano inseriti “a mano” nella Lagrangiana soffrono di ben più gravi problemi (sono non-rinormalizzabili e non unitari al di sopra di una certa soglia di energia, come illustrato nei prossimi paragrafi). La scappatoia esiste, e si basa su una proprietà assai peculiare e profonda delle teorie quantistiche. Una simmetria “classica”, infatti, è semplicemente una simmetria delle equazioni del moto delle particelle. In Meccanica Quantistica, tuttavia, il concetto di moto va rivisto e le quantità misurabili sono legate ad ampiezze di correlazione, funzioni di transizione tra stati quantici. Osservabili e stati insieme devono quindi rispettare la simmetria. In particolare, lo stato fondamentale, il vuoto, deve farlo. Quando le equazioni sono simmetriche ma il vuoto non lo è, si dice che la simmetria è spontaneamente rotta. Accade infatti che il vuoto non è più unico, e la sua scelta determina una scelta di gradi di libertà fisici che non rispettano più la simmetria. In altri termini, le equazioni sono simmetriche, le soluzioni no. La differenza con il caso di rottura cosiddetta “esplicita” (quindi con l’assenza di simmetria a tutti gli effetti) consiste nel fatto che alcune proprietà della teoria “simmetrica” possono essere mantenute anche nella fase “rotta”, come ad esempio la rinormalizzabilità e l’unitarietà. La rottura spontanea di simmetria è una transizione di fase, guidata (nella versione più semplice, App. A.11) da un campo scalare legato ad un opportuno potenziale. Nel Modello Standard, la simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ è spontaneamente rotta grazie ad un doppietto di campi scalari complessi. La simmetria residua descrive l’elettromagnetismo, e dunque è un gruppo $U(1)_{em}$ il cui vettore di gauge, combinazione di Z e di Y , è il fotone, rigorosamente privo di massa. Il doppietto di campi scalari acquista invece un valore di aspettazione nel vuoto, e tre delle componenti vengono “mangiate” dai bosoni delle interazioni deboli che acquistano così una “massa”, insieme alle particelle di materia che ugualmente acquistano una massa grazie ad accoppiamenti con il campo scalare stesso (accop-

⁴Ovviamente sinistra e destra sono convenzionali, quel che conta è la chiralità relativa

⁵Compresi i neutrini, la cui massa, pur piccola, è stata recentemente confermata essere non nulla dalla misura delle “oscillazioni”. Infatti, se i neutrini hanno differenze (anche molto piccole) di massa, non restano stabili ma danno luogo a fenomeni di mescolamento tra i diversi tipi delle tre famiglie.

piamenti di Yukawa). Il quarto grado di libertà residuo è un campo scalare reale massivo che compare nello spettro, il cosiddetto bosone di Higgs, unico tassello del Modello Standard a dover ancora essere scoperto. Probabilmente sarà osservato, qualora esista (sia pure come grado di libertà leggero di possibili meccanismi più complessi), nell'esperimento "Large Hadron Collider" (LHC) del CERN di Ginevra nei prossimi anni. Uno sguardo alla Tabella 2.2 consente di osservare che la materia è composta da due classi di particelle: i quark ed i leptoni. I quark hanno carica elettrica frazionaria ($\pm 1/3$ o $\pm 2/3$) ed esistono in sei "sapori", detti per motivi storici up (u), down (d), charme (c), strange (s), bottom (b) e top (t), ciascuno appartenente ad un tripletto del gruppo $SU(3)_c$ di colore. Ciascun quark, quindi, è dotato di carica forte, detta appunto colore, che compare in tre varietà (usualmente indicate con rosso verde e blu). Le componenti sinistre dei quark, inoltre, sono anche "doppietti" dell' $SU(2)_L$, e quindi dotate di un indice che individua la loro carica "debole" (a volte detta di "isospin debole", sempre per motivi storici). I leptoni, che compaiono anch'essi in sei diversi "sapori", noti come elettrone (e), muone (μ), tau (τ) e rispettivi neutrini, neutrino dell'elettrone ν_e , neutrino del muone ν_μ e neutrino del tau ν_τ , sono invece singoletti di colore, ovvero scarichi rispetto alle interazioni forti. I neutrini sono particelle neutre, hanno cioè carica elettrica nulla, mentre i restanti leptoni hanno carica intera positiva o negativa. Le rispettive componenti sinistre sono invece dotate di isospin debole. Vale la pena di sottolineare alcune peculiarità che il lettore attento avrà sicuramente osservato: anzitutto non sono presenti neutrini "destri". Si assumeva infatti, prima degli esperimenti sulle oscillazioni dei neutrini, che essi fossero privi di massa e dunque non fosse necessario includere nel Modello Standard le componenti destre, peraltro completamente sterili, cioè prive di interazioni con le rimanenti paricelle. Si può ben affermare che le oscillazioni dei neutrini siano il primo segnale sperimentale di "fisica oltre il Modello Standard". Quark e leptoni, inoltre, presentano una "struttura verticale" organizzata in tre famiglie (o generazioni) di particelle con proprietà molto simili, che si ripetono praticamente immutate, con l'eccezione della massa che invece cresce nel passaggio dalla prima alla terza famiglia. La materia con cui comunemente si ha a che fare è essenzialmente esaurita dalle particelle della prima famiglia. La scoperta del muone, del tutto inattesa ed apparentemente "inutile", spinse il grande Raby ad esclamare il famoso "who ordered that"? (Chi l'ha ordinato?). Non vi è spiegazione alla presenza di tre repliche praticamente identiche delle particelle della prima famiglia. Il quark top, ultimo ad essere scoperto, ha una massa addirittura di 175 volte la massa del protone, risultando ben 500 volte circa più pesante del "gemello" della prima famiglia, il quark up. Il "gauging" del gruppo del Modello Standard richiede inoltre di introdurre ben dodici bosoni intermedi (uno per ciascun generatore del gruppo), gli otto gluoni delle interazioni forti (G), i tre bosoni delle interazioni deboli (W_+, W_- and W^3) ed il bosone dell' $U(1)$ di ipercarica, Y . Il doppietto di campi di Higgs, come spiegato in precedenza ed in App. A.11, dà luogo alla rottura spontanea della simmetria elettrodebole, producendo tre bosoni massivi. Due, W_+ e W_- , sono carichi, il terzo Z_0 è una combinazione lineare di W^3 ed Y secondo la relazione:

$$Z_0^\mu = \cos(\theta_W)W^{3\mu} - \sin(\theta_W)Y^\mu \quad , \quad (2.1)$$

dove θ_W è un angolo di mescolamento, detto angolo di Weinberg. Il "mixing" deve essere introdotto in modo tale che, nella fase di "rottura spontanea" della simmetria, lo stato ortogonale allo Z_0^μ possa essere mantenuto esattamente a massa nulla ed identificato con il fotone:

$$A^\mu = \sin(\theta_W)W^{3\mu} + \cos(\theta_W)Y^\mu \quad . \quad (2.2)$$

Il "valore di aspettazione nel vuoto" (vev) del campo di Higgs è responsabile anche delle masse

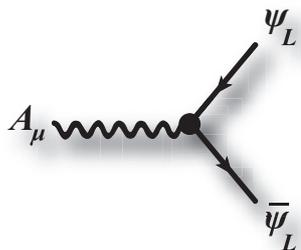


Figura 2.1: Vertice di QED.

delle particelle di materia attraverso gli “accoppiamenti” di Yukawa. I neutrini, nel Modello Standard, sono mantenuti a massa nulla.

2.2 Correzioni Quantistiche

Come esaminato nel precedente paragrafo, il Modello Standard è una teoria quantistica di gauge. La forma delle interazioni è dunque fissata dal principio di gauge. Tuttavia, la teoria descrive campi quantistici accoppiati in modo altamente non-lineare. In altri termini, è impossibile risolvere esattamente le equazioni di Eulero-Lagrange che descrivono la dinamica dei campi in interazione (App. A.6). In simili situazioni, si cercano le soluzioni per iterazioni successive, ovvero si sviluppano in serie di potenze le quantità da calcolare nella speranza che le serie convergano. In un approccio in cui le correlazioni della teoria quantistica siano descritte in termini di un “integrale funzionale” (un approccio intuito da P.A.M. Dirac e J. Schwinger e formulato nella stesura definitiva da R. Feynman), lo sviluppo “perturbativo” corrisponde ad una espansione dell’integrale intorno al “vuoto quantistico” con il metodo del punto di sella. Il parametro naturale di espansione risulta essere la costante di accoppiamento, la quantità che entra nei vertici e “misura”, in un certo senso, la complessità dell’interazione nonché l’ordine della correzione quantistica. Una rappresentazione molto efficace della serie perturbativa, che si deve allo stesso Feynman, è quella nella quale ad ogni termine viene associato un ben preciso diagramma (“grafico di Feynman”). La forma dell’interazione fornisce le cosiddette “regole di Feynman”. I “processi di diffusione” si ottengono, infatti, combinando in tutti i modi consentiti possibili le linee (interne ed esterne) ed i vertici relativi ad un certo processo. Per chiarire le idee, si consideri ad esempio la teoria di gauge più semplice, la versione quantistica dell’elettromagnetismo nota come elettrodinamica quantistica (QED, Quantum ElectroDynamics: App. A.10). Essa corrisponde, come descritto in precedenza, al settore $U(1)_{em}$ del Modello Standard, quello che sopravvive intatto alla rottura spontanea della simmetria elettrodebole. Limitatamente alla QED, si hanno a disposizione nello spettro leptoni carichi (elettroni, muoni e tau) e fotoni. Nei grafici di Feynman, è convenzione in uso associare una linea continua ai leptoni ed una linea ondulata ai fotoni, ciascuna accompagnata dai numeri quantici (carica, impulso, massa e spin) della rispettiva particella. L’interazione di gauge fornisce un unico tipo di vertice, riportato in figura 2.1, che può essere interpretato come un leptone che emette un fotone (oppure come un fotone che genera una coppia leptone-antileptone). La freccia distingue

tra particelle ed antiparticelle: una freccia uscente equivale ad una antiparticella entrante. Si consideri, ad esempio, il processo in cui gli stati iniziali siano un elettrone ed un positrone che interagiscono producendo una coppia muone-antimuone. Esso può essere rappresentato come in figura 2.2, ed il suo sviluppo in serie si ottiene considerando tutti i grafici topologicamente inequivalenti che si possono tracciare usando le linee (propagatori) ed i vertici a disposizione. Il contributo ad ordine più basso è quello in cui l'interazione è mediata da un solo fotone,

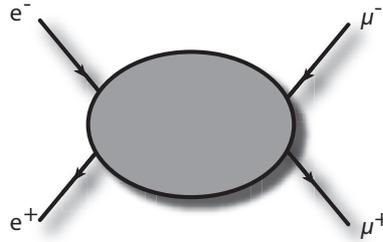


Figura 2.2: Processo di diffusione: elettrone-positrone in muone-antimuone.

prodotto dall'annichilazione della coppia elettrone-positrone e riassorbito per generare la coppia muone-antimuone (Fig. 2.3). Il fotone è "virtuale", nel senso che nel vertice il quadrivettore impulso non può soddisfare la condizione di "mass-shell", ovvero non può corrispondere ad una particella di massa nulla, dovendo risultare la somma dei due impulsi delle particelle entranti. Tuttavia, se la violazione in energia ΔE persiste per un tempo inferiore a $\delta t \sim \hbar/\Delta E$, il processo è in accordo col principio di indeterminazione. Il diagramma in figura 2.3 viene anche detto "ad albero" (tree level) e corrisponde al termine "classico" dell'interazione, l'unico che sopravviverebbe nel limite in cui le correzioni quantistiche siano ignorate. Il vero parametro di espansione, infatti, è il prodotto della costante d'accoppiamento con la costante di Planck \hbar , che misura la scala in cui i fenomeni "quantistici" diventano rilevanti. Il limite classico corrisponde, quindi, ad $\hbar \rightarrow 0$, ovvero al limite in cui tutti i termini proporzionali alla costante di Planck possano essere trascurati. Si osservi, inoltre, che il contributo ad albero è l'unico a non contenere "loop" chiusi, i quali sono responsabili esattamente delle correzioni quantistiche o "correzioni radiative" (un esempio di diagramma contenente un loop è illustrato in figura 2.4). In particolare, il numero di "loop" è direttamente legato all'ordine di potenze di \hbar della correzione ovvero all'ordine dello sviluppo in teoria delle perturbazioni. Se la serie di potenze

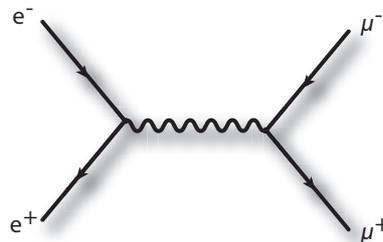


Figura 2.3: Ampiezza "ad albero" in QED.

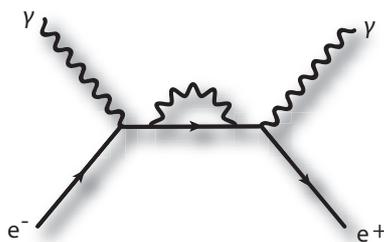


Figura 2.4: Ampiezza “ad un loop” in QED.

converge, fatto che può accadere soltanto se la costante di accoppiamento (il parametro di espansione) è piccola, gli ordini superiori forniscono contributi via via decrescenti alle quantità calcolate nel processo.

Una ulteriore complicazione entra in gioco non appena si considerino le correzioni radiative. Il momento delle particelle virtuali che si propagano all'interno dei loop risulta infatti completamente arbitrario. La prescrizione richiede conseguentemente di sommare su tutti i possibili valori dell'impulso fino ad infinito (limite ultravioletto). Il risultato di tale integrazione è a sua volta infinito, producendo una divergenza ultravioletta. Esistono teorie in cui le divergenze ultraviolette non compaiono per via di un elevato grado di simmetria (teorie finite). Altre in cui le divergenze si manifestano soltanto in un numero finito di diagrammi “fondamentali” (teorie rinormalizzabili). Altre, infine, in cui divergenze appaiono in un numero infinito di diagrammi fondamentali (teorie non rinormalizzabili). L'interpretazione fisica di tali divergenze è assai naturale: i parametri che compaiono nelle lagrangiane, quali masse e costanti di accoppiamento, non sono in realtà parametri fisici ma solo parametri che descriverebbero le quantità fisiche se si potesse misurarle ad una distanza nulla. Essi hanno valore infinito (parametri nudi o “bare”). Tuttavia, le quantità fisiche ad una certa distanza (e ad una certa scala di energia) sono, per così dire, schermate dalle fluttuazioni del vuoto quantistico. Le quantità fisiche “misurate” sono quelle che emergono alla distanza della misura. Nelle teorie rinormalizzabili, gli infiniti prodotti dai diagrammi nell'ultravioletto hanno la stessa forma dei termini presenti nella lagrangiana. Ad un certo ordine di teoria delle perturbazioni, è quindi possibile definire le quantità fisiche sottraendo alle quantità nude gli infiniti legati alle fluttuazioni quantistiche. In termini delle quantità rinormalizzate, la teoria produce risultati finiti. Il confronto con gli esperimenti fissa i parametri rinormalizzati ad una certa scala, e la teoria diviene predittiva, nel senso che una volta fissati, i parametri rinormalizzati consentono in linea di principio di calcolare ogni diagramma allo stesso ordine di teoria delle perturbazioni. Gli infiniti vengono rimossi trasportandoli nella definizione dei parametri “bare”. Per fare un esempio: la carica elettrica “bare” dell'elettrone è infinita, ma è schermata dalle coppie virtuali che continuamente vengono emesse e riassorbite nel vuoto. Più ci si avvicina all'elettrone, più la carica “effettiva” cresce, diminuendo l'effetto di schermo del vuoto pensato come un “dielettrico”.

La procedura di rinormalizzazione non è indolore. Essa infatti introduce una nuova scala nella teoria. Per poter effettuare la sottrazione degli infiniti in modo “sensato”, occorre prima di tutto rendere finite e calcolabili le correzioni quantistiche mediante l'introduzione di una “regolarizzazione”. Ad esempio, il modo più semplice consiste nell'introduzione di un “cut-off”, un limite superiore Λ per gli impulsi che elimini la pericolosa regione ultravioletta. Tale “cut-off”

va poi rimosso per introdurre le quantità rinormalizzate, che tuttavia dipendono dalla “scala di sottrazione” una volta che il “cut-off” è mandato all’infinito. Di conseguenza i parametri efficaci rinormalizzati non possono più essere delle costanti, devono essere delle funzioni della scala aggiuntiva (trasmutazione dimensionale). Le costanti di accoppiamento, ad esempio, cessano di essere costanti e divengono quantità che dipendono dalla scala di sottrazione (“running coupling constant”). La dipendenza funzionale dalla scala delle costanti di accoppiamento è fondamentale per capire la natura della teoria corrispondente e, poichè le trasformazioni formano un gruppo, le equazioni che la determinano sono note come equazioni del gruppo di rinormalizzazione.

Per fissare le idee, è utile illustrare la procedura in un caso estremamente semplificato⁶ che tuttavia riesca a catturare ed illustrare l’intera problematica. Il calcolo dei diagrammi ad “1 loop”, come menzionato in precedenza, produce tipicamente delle quantità infinite. Se regolarizzate, tali quantità vengono rese finite e possono essere incluse nella Lagrangiana. In una teoria rinormalizzabile, esse appaiono come “controtermini” della stessa forma dei termini inizialmente presenti, ma dipendenti dal cutoff Λ . Ad esempio, la costante di accoppiamento viene corretta da termini della forma

$$g(\Lambda) = g_F + g_F^2 b_0 \log\left(\frac{\Lambda}{q}\right) , \quad (2.3)$$

dove g è la costante di accoppiamento “efficace” e g_F è il valore “fisico”, rinormalizzato, misurato in un opportuno processo alla scala q (si osservi che per $\Lambda = q$ il valore di $g(\Lambda)$ è esattamente g_F). La rimozione del cutoff renderebbe la g infinita. Tale $g(\infty)$ viene interpretata come la costante d’accoppiamento “nuda” (“bare”). La vera costante di accoppiamento efficace è la differenza tra la costante “bare” e la schermatura del vuoto, che appare come una sorta di mezzo dielettrico. Per rimuovere il cutoff, si deve fissare una scala arbitraria μ , la scala alla quale si “misura” la costante d’accoppiamento efficace, che è appunto la scala di sottrazione. Va sottolineato che la dipendenza funzionale della costante d’accoppiamento effettiva dalla scala è la stessa di quella della costante bare dal cutoff. Si può dunque scrivere:

$$g(\mu) = g_F + g_F^2 b_0 \log\left(\frac{\mu}{q}\right) . \quad (2.4)$$

La rimozione del cutoff produce una compensazione fra i due infiniti, restituendo una costante d’accoppiamento efficace finita ma dipendente dalla scala arbitraria di sottrazione μ . Tuttavia, il valore alla scala q è fissato dalla misura, mentre il valore generico ad ogni altra scala è determinato dall’imporre che la g “bare”, pur infinita, non sia in nessun modo influenzata dalla scelta della scala μ . In altri termini, la dipendenza funzionale in eq. (2.4) fissa il “running” di g con la scala. Derivando rispetto a μ si ottiene infatti l’equazione

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = b_0 g^2 , \quad (2.5)$$

ove si è utilizzato lo sviluppo della g in serie di g_F . In generale, l’equazione del gruppo di rinormalizzazione per la costante d’accoppiamento si può scrivere nella forma

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g) , \quad (2.6)$$

⁶Si suppone che l’unico controtermine sia nella costante d’accoppiamento.

ove la funzione β dipende dall'ordine di teoria delle perturbazioni ed è una serie di potenze nella stessa g , $\beta(g) = b_0 g^2 + o(g^3)$. Le equazioni del gruppo di rinormalizzazione (2.6) si possono integrare e forniscono, ad esempio ad un loop,

$$g(M) = \frac{g_F}{1 - b_0 g_F \log(M/q)} \quad , \quad (2.7)$$

ove M è la scala fino alla quale si integra. Si osservi come il comportamento di g dipenda crucialmente dal segno di b_0 . Un b_0 positivo produce, ad una certa scala, una costante di accoppiamento efficace infinita (polo di Landau). Ovviamente l'estrapolazione è insensata, in quanto l'analisi delle soluzioni in teoria perturbativa funziona fintantochè la g rimanga ragionevolmente piccola. Molto interessante, invece, risulta il caso in cui b_0 sia negativo: il vuoto assume allora la funzione di mezzo "antischermo" e la costante d'accoppiamento, a grandi scale, tende a zero. Un simile fenomeno, noto come "libertà asintotica", assume un ruolo fondamentale nella teoria delle interazioni forti, come apparirà chiaro nel paragrafo 2.4.

Assegnato il contenuto di campi di una teoria, il coefficiente b_0 può essere calcolato e risulta proporzionale ad un fattore di teoria dei gruppi legato ai Casimir delle rappresentazioni dei campi presenti. In particolare, nel Modello Standard, la QCD (quindi l' $SU(3)_c$ di colore) e l' $SU(2)_L$ nella fase non rotta sono asintoticamente liberi, mentre la QED ha un polo di Landau. Si osservi infatti che la costante di accoppiamento della QED, la cosiddetta costante di struttura fine, $\alpha_{em} = e^2/4\pi$ vale circa 1/137 alla scala dell'interazione Coulombiana (a momento nullo), mentre vale 1/128 circa alla scala elettrodebole ($\sim M_W$).

Infine, un cenno alle teorie non-rinormalizzabili: in tal caso ad ogni ordine di teoria delle perturbazioni emergono nuove divergenze. È quindi impossibile riassorbirle tutte nella ridefinizione di un numero finito di parametri. Rimuovendo il cut-off, la teoria diviene non predittiva e quindi priva di senso fisico. La rimozione del cut-off dà luogo ad infiniti. Un esempio che verrà illustrato nel paragrafo 3.3, è la versione quantistica della Relatività Generale di Einstein. Il motivo della sua non-rinormalizzabilità risiede nella dimensionalità della costante d'accoppiamento gravitazionale (la costante di Newton). Va sottolineato, tuttavia, che una teoria non-rinormalizzabile può ben essere una teoria "effettiva" a bassa energia di una teoria più generale in cui le divergenze vengano poi eliminate grazie, ad esempio, ad un più elevato grado di simmetria. La teoria fondamentale potrebbe ad esempio possedere un cut-off naturale, al di sotto del quale si riduca alla teoria effettiva come descrizione dei soli gradi di libertà leggeri. La Relatività Einsteiniana è una delle possibili teorie effettive di bassa energia che si ottengono da una teoria di stringa. Il cut-off, in tal caso, è la scala alla quale la descrizione di stringa entra in gioco nel modificare la struttura dello spazio-tempo (la scala di stringa).

2.3 Interazioni Elettrodeboli

Il settore elettrodebole del Modello Standard descrive in modo unificato le interazioni elettromagnetiche e deboli. Come visto in precedenza, il fotone è il bosone di gauge relativo al generatore "non rotto" del mixing dei bosoni neutri dell' $SU(2)_L$ e dell' $U(1)_Y$, mantenuto rigorosamente privo di massa⁷. In tal modo, la QED viene inglobata nel Modello Standard, ed anzi ne costituisce di gran lunga il settore più "pulito", nel senso che l'accordo tra previsioni teoriche e misure sperimentali non ha eguali nello scibile umano. Non è un caso che la Teoria

⁷Il limite sperimentale sulla massa del fotone è $m_\gamma < 10^{-17}$ eV.

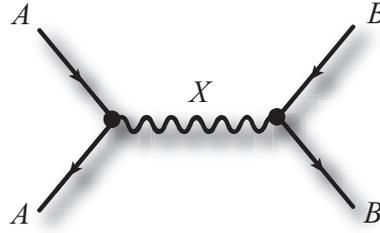


Figura 2.5: Processo “ad albero” mediato dal bosone X .

Quantistica dei Campi sia nata essenzialmente dallo studio della QED. L’assenza di massa per il fotone è indice del fatto che l’interazione elettromagnetica agisce a “lungo range”. Se si considera infatti un processo in cui una certa interazione è mediata da un bosone di gauge X , il corrispondente processo ad albero viene descritto dal grafico di Feynman mostrato in figura 2.5, ove ad esempio la particella A interagisce con la particella B attraverso lo scambio della particella “virtuale” X . Affinchè la particella X venga prodotta, l’energia in gioco deve essere più grande della sua energia di riposo $M_X c^2$.

L’interazione virtuale deve avvenire entro un tempo che rispetti il principio di indeterminazione, quindi la scala tipica deve essere dell’ordine di $\hbar/M_X c^2$. Ad essa corrisponde quindi un range massimo per l’interazione dell’ordine di $R \sim \hbar/M_X c$. Il fotone, essendo privo di massa, può dunque mediare interazioni a distanze arbitrarie. Non così può avvenire per le interazioni deboli. Esse infatti sono a corto range ($\sim 10^{-18}m$) ed hanno scale di tempo tipiche maggiori di 10^{-10} s, corrispondenti a bosoni intermedi con masse dell’ordine di $90 GeV$. Storicamente, l’identificazione delle interazioni deboli ha richiesto un notevole sforzo, sia teorico che sperimentale, che ha condotto al riconoscimento di una vasta gamma di processi apparentemente diversi come appartenenti ad un’unica classe di universalità riconducibile ad un’unica costante di accoppiamento, nota come costante di Fermi. La prima descrizione introdotta dallo stesso Fermi di un’interazione puntuale a quattro particelle è stata sempre di più raffinata in virtù dei problemi di consistenza dei modelli via via proposti, fino a giungere alla formulazione attuale dovuta a Glashow, Weinberg, Salam, Iliopoulos, Maiani, Cabibbo, Higgs e molti altri. Sperimentalmente, le interazioni deboli violano massimamente la parità \mathcal{P} , il coniugio di carica \mathcal{C} ed anche il loro prodotto \mathcal{CP} (si rammenti che invece il prodotto \mathcal{CPT} , ove \mathcal{T} è l’operatore di inversione temporale (“time reversal”), è sempre una simmetria delle teorie di campo), come evidenziato ad esempio dallo studio dei decadimenti dei mesoni K .

L’accoppiamento minimale di gauge, essendo chirale, impedisce l’introduzione di termini di massa espliciti per i bosoni vettori intermedi. Tali termini, infatti, condurrebbero inevitabilmente la teoria ad essere non-rinormalizzabile e non unitaria per via del cattivo comportamento nell’ultravioletto delle funzioni di Green, i propagatori. Come dimostrato da G. ’t Hooft e M. Veltman nel 1970, tuttavia, le teorie di gauge in cui le masse siano ottenute attraverso il meccanismo di Higgs (App. A.11) sono rinormalizzabili. Il prezzo da pagare, in tal caso, è l’introduzione di un doppietto di campi scalari complessi dei quali, dopo la transizione alla fase di “rottura spontanea di simmetria”, tre componenti reali forniscono i gradi di libertà longitudinali necessari a rendere massivi i bosoni di gauge, mentre la quarta componente resta nello spettro sotto forma di campo scalare reale, il campo di Higgs. La particella ad esso associata, il bosone di Higgs, è l’unico tassello che ancora manca per completare il panorama

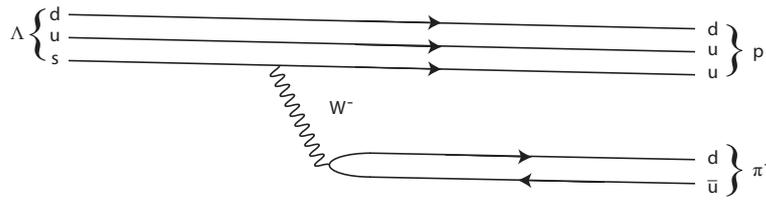


Figura 2.6: Un decadimento puramente adronico.

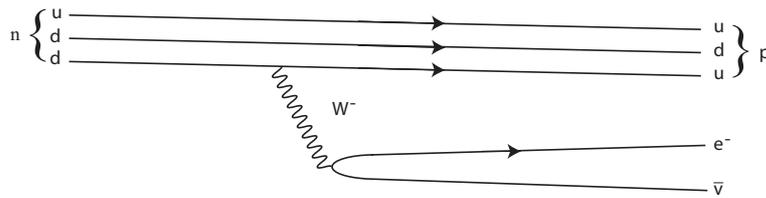


Figura 2.7: Un decadimento semileptonico.

delle particelle del MS di tabella 2.2. L'esperimento LEP (Large Electron-Positron collider del CERN di Ginevra) ha posto dei limiti inferiori per la massa dell'Higgs intorno ai 110 GeV , ed ovviamente esistono fondatissime speranze sul fatto che possa essere osservato nel prossimo esperimento LHC del CERN. L'invarianza di gauge proibisce non solo termini di massa per i bosoni di gauge ma anche per i campi fermionici di materia, leptoni e quark. Le relative masse si ottengono mediante accoppiamenti cubici di Yukawa dei campi di materia con il campo di Higgs i quali, nella fase rotta, ovvero in presenza di un valore d'aspettazione nel vuoto (vev) non nullo, divengono esattamente termini di massa proporzionali al vev medesimo.

Il settore relativo alle interazioni deboli dei quark è assai interessante. Diversi decadimenti possono essere studiati analizzando le interazioni deboli tra quark e bosoni intermedi dell' $SU(2)_L$, sia puramente adronici (cioè che coinvolgano solo particelle con interazioni forti, gli adroni) sia semileptonici (che coinvolgano adroni e leptoni). Ad esempio, un decadimento puramente adronico è quello in cui un barione Λ (composto da tre quark u, d e s) decade in un protone p (u, u, d) ed un mesone π^- ($\bar{u}d$). Un decadimento semileptonico è il classico decadimento beta in cui il neutrone n (u, d, d) dà luogo ad un protone, un elettrone ed un antineutrino elettronico. Il primo può essere interpretato (Fig. 2.6) come un diagramma in cui il quark s , emettendo un W^- che decade in $d\bar{u}$ cioè π^- , si trasforma in u . Il secondo (Fig. 2.7) come un diagramma in cui il quark d , emettendo un W^- che decade in $e, \bar{\nu}_e$, si trasforma in u . Il problema cruciale consiste nel fatto che nella fase rotta i quark assumono una massa, che in presenza di più generazioni corrisponde ad una matrice che deve essere diagonalizzata per descrivere i quark "fisici". Ora, non vi è alcuna ragione per cui gli autostati delle masse debbano coincidere con i campi che entrano nei termini di interazione, ovvero con gli autostati delle correnti. Infatti, i quark che entrano nei doppietti della tabella 2.2 sono ruotati rispetto a quelli delle correnti per una matrice detta di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Ad esempio, limitatamente alle sole prime due famiglie, le componenti basse dei doppietti non coincidono semplicemente con

le componenti sinistre di d e s , bensì con le seguenti combinazioni

$$\begin{aligned} d' &= d \cos(\theta_C) + s \sin(\theta_C) \\ s' &= -d \sin(\theta_C) + s \cos(\theta_C) \quad , \end{aligned} \quad (2.8)$$

ove θ_C , detto angolo di Cabibbo, misura sperimentalmente circa 13° . La presenza del “Cabibbo mixing”, il primo ad essere ipotizzato quando solo tre dei sei sapori dei quark erano congetturati, permette processi in cui c’è un cambiamento di sapore tra quark di famiglie diverse, che altrimenti sarebbero vietati (FCNC, “Flavour Changing Charged Currents”). Il mixing, d’altra parte, non influisce sulle correnti neutre, quelle relative al fotone ed allo Z , che continuano ad accoppiare nei multipletti componenti alte con alte e basse con basse. Come risultato, i processi con cambiamenti di sapore mediati da correnti neutre sono altamente soppressi (no FCNC, “Flavour Changing Neutral Currents”). Nell’ambito del Modello Standard i due aspetti appena analizzati emergono in modo naturale traducendosi semplicemente nell’unitarietà della matrice di mixing, peraltro ovvia essendo la matrice di mixing una matrice del cambiamento di base tra vettori complessi. La soppressione dei processi con FCNC, tuttavia, è di solito indicata come “Meccanismo GIM”, dalle iniziali di S.L. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani che per primi lo proposero nel 1970. In quel momento, solo tre quark erano congetturati, ed il meccanismo GIM spiegava in modo molto elegante la soppressione dei processi con FCNC, predicendo allo stesso tempo l’esistenza di un quarto quark, il c (charme). L’esistenza del c fu poi confermata sperimentalmente con la scoperta del “charmonio”, stato legato $c\bar{c}$. Lo stato fondamentale del charmonio fu denominato J da S. Ting e collaboratori e, indipendentemente, ψ da B. Richter e collaboratori. La particella è oggi nota come J/ψ . La scoperta valse ad entrambi i gruppi il premio Nobel nel 1977.

In presenza di tre generazioni, la situazione dei mescolamenti è più complessa. La matrice di CKM diviene una matrice 3×3 . Essendo unitaria, essa predice ancora la soppressione dei processi con FCNC. D’altra parte, riassorbendo alcuni dei parametri nella definizione dei multipletti, si può mostrare che la matrice CKM dipende in realtà da quattro parametri organizzati in tre angoli ed una fase. Uno degli angoli coincide con l’angolo di Cabibbo, mentre una grande rilevanza deve essere attribuita alla fase, che rappresenta l’unico parametro che nel Modello Standard è responsabile dell’osservata violazione di \mathcal{CP} e che sarebbe assente se non fossero presenti almeno tre famiglie.

2.4 Interazioni Forti

Il settore del Modello Standard che descrive le interazioni forti è senza dubbio il più complesso e per certi versi il più sorprendente. La teoria corrispondente, basata sul gruppo di gauge $SU(3)_c$ di colore, viene detta Cromodinamica Quantistica (QCD) in virtù del fatto che la corrispondente carica delle interazioni forti viene detta convenzionalmente “colore”. Dalla tabella 2.2 risulta evidente che le particelle “colorate” nel Modello Standard siano quark e gluoni. Le interazioni forti sono infatti le interazioni fra quark mediate dai gluoni. Nel mondo fisico, tuttavia, la struttura a quark non è poi così evidente. Le particelle che interagiscono fortemente, infatti, dette “adroni” (dal greco adros, denso, pieno), sono particelle “composte” da quark. In particolare, i cosiddetti “barioni” (particelle pesanti) sono composti di tre quark, mentre i mesoni (particelle intermedie) sono composti da coppie quark-antiquark. Poiché i quark hanno spin $1/2$ e carica elettrica frazionaria, i barioni sono particelle di spin semintero (e dunque

fermioni) e carica elettrica intera, mentre i mesoni sono particelle di spin intero (e dunque bosoni) e carica elettrica intera. I già citati protone (u, u, d) e neutrone (u, d, d) sono esempi di barioni, mentre il π^- ($\bar{u}d$) è un esempio di mesone. I quark furono introdotti da M. Gell-Mann per classificare le molte risonanze adroniche scoperte a partire dagli anni '50. Supponendo che tali risonanze fossero composte di stati in rappresentazioni del gruppo $SU(3)$ con spin semintero e carica frazionaria, si riuscirono a classificare le risonanze note ed a predirne di nuove (ad esempio l' Ω^-). Il tripletto si pensava dovesse essere composto dai quark fino ad allora noti, (u, d, s). A causa dell'evidenza, seppur indiretta, delle masse diverse dei quark, la simmetria poteva tuttavia essere valida solo ad alte energie. Altre incongruenze emergevano in modo assai evidente. Ad esempio, le interazioni forti sono molto intense (la costante di accoppiamento è grande ($\alpha_S \sim 14$), e tuttavia agiscono in un "range" molto piccolo, dell'ordine delle dimensioni del nucleo atomico. Inoltre, i quark non si vedono liberi e sembrano quindi assomigliare più ad uno strumento matematico di classificazione che a reali particelle. In alcune risonanze, ad esempio, sembravano comparire tre quark identici negli stessi stati quantici, una palese violazione del principio di esclusione di Pauli. Inoltre, non si aveva idea di quali potessero essere le particelle che mediano la forza forte. Negli anni '70, finalmente, alcune decisive scoperte portarono alla formulazione della QCD. Anzitutto la previsione e poi la scoperta del charm c indicarono che l' $SU(3)$ ipotizzato, oggi detto di "sapore", non potesse essere la simmetria che detta la forma dell'interazione. Una osservazione cruciale si ebbe analizzando il rapporto tra i decadimenti di coppie elettrone-positrone. Queste producono fotoni, che poi possono a loro volta decadere sia in coppie leptone-antileptone, che in coppie quark-antiquark (che producono adroni). Si può facilmente ricavare che i rapporti tra le probabilità di questi decadimenti è proporzionale al numero di quark coinvolti. L'analisi dei risultati dimostra inequivocabilmente che ciascun quark (quindi ciascun sapore) deve esistere in tre diverse varietà, e dunque occorre introdurre un nuovo numero quantico, il colore appunto, di cui i quark sono i tripletti sorgenti. La simmetria di gauge produce il resto: l'interazione è dettata dall'accoppiamento minimale e le particelle mediatrici sono i bosoni di gauge a massa nulla, i gluoni. Gli adroni appaiono così composti di quark neutri rispetto alla carica di colore. Stati "colorati" non esistono liberi.

Resta da comprendere per quale motivo non esistano quark liberi ed ancora per quale motivo i gluoni, pur essendo privi di massa, mediano delle interazioni a corto range. La spiegazione dei due fenomeni ha decretato, negli anni '70, il trionfo della teoria quantistica dei campi⁸. Come detto, la costante d'accoppiamento forte è grande, quindi lo sviluppo perturbativo non si può applicare almeno alle energie tipiche dei processi adronici. Sempre in quegli anni fu esplorata la diffusione profondamente anelastica di elettroni su protoni. Molti esperimenti evidenziarono che alle energie assai più alte coinvolte, il protone può essere pensato composto di oggetti "puntiformi" liberi di muoversi, ciascuno dei quali responsabile di una frazione dell'impulso totale. Le sezioni d'urto corrispondenti infatti, esibiscono un comportamento in accordo con la cosiddetta "ipotesi di scaling" di Bjorken. In altre parole, ad alta energia esse divengono indipendenti dall'impulso totale e dipendono solo dalla frazione di impulso del componente (allora detto "partone", che oggi è noto essere un quark). La pittura che emerge è dunque la seguente: ad alta energia (piccole distanze), i quark sono come "liberi" dentro gli adroni, a bassa energia (grandi distanze) solo gli adroni "si vedono". Il lettore attento avrà osservato che, alla luce di quanto detto nel precedente paragrafo, tutto questo può essere perfettamente

⁸Il grande S. Coleman ne parla in questi termini: "furono anni di trionfi, e che trionfi, nel senso antico del termine: come le gloriose sfilate dopo una vittoria, in cui cose meravigliose vengono portate da luoghi lontani per rendere lo spettatore attonito dallo stupore e pazzo dalla gioia."

spiegato in termini di teoria dei campi. La QCD, infatti, è una teoria asintoticamente libera. Di conseguenza, la costante di accoppiamento ad alte energie “corre” verso valori molto piccoli (i quark sono liberi). Viceversa, a basse energie (al di sotto di qualche GeV), le interazioni forti tengono i quark indissolubilmente legati in singoletti di colore, o, come si dice in gergo, “confinati”. Per semplificare, si può immaginare un mesone come una coppia quark-antiquark legata da un elastico o meglio da una “stringa”. Quando le energie sono alte ed i quark molto vicini, è come se l’elastico non ci fosse. Ma appena si prova ad allontanarli, l’elastico oppone una resistenza che cresce sempre di più al crescere della distanza tra i quark medesimi. Il confinamento non può essere dimostrato analiticamente perchè riguarda il regime “non perturbativo” della QCD. Tuttavia, evidenza del confinamento si può avere utilizzando calcoli esatti numerici ottenuti regolarizzando la teoria con una discretizzazione dello spazio tempo, cioè studiando la QCD su un “reticolo” quadridimensionale. Si trova che il potenziale di interazione tra quark cresce (rozamente) in modo lineare con la distanza. La relativa costante di proporzionalità, detta “tensione di stringa”, può essere stimata via i calcoli numerici.

Integrando le equazioni del Gruppo di Rinormalizzazione della QCD, è possibile determinare una scala, di solito indicata come Λ_{QCD} , che corrisponde all’energia alla quale la costante d’accoppiamento forte diviene infinita, cioè la “scala di confinamento”. Osservando l’eq. (2.6), si vede facilmente che ad esempio, ad un loop, la quantità tale che

$$g(k) = -\frac{1}{b_0 \ln(k/\Lambda)} \quad , \quad (2.9)$$

ovvero

$$\Lambda_{QCD} = k e^{-\frac{1}{|b_0| g(k)}} \quad , \quad (2.10)$$

indipendente dalla scala k a cui si misura la costante d’accoppiamento, è esattamente la quantità cercata. Essa non dipende dalla rinormalizzazione, è una “scala intrinseca, il cui significato fisico appare abbastanza ovvio: processi in cui gli impulsi coinvolti siano molto maggiori della scala di QCD (che dalle ultime determinazioni sperimentali riportate dal “particle data group” risulta essere circa 240 MeV), possono essere trattati usando le interazioni elementari di quark e gluoni, che in quel regime sono estremamente deboli, in teoria delle perturbazioni. Viceversa, per scale più piccole di Λ_{QCD} , si entra nel regime di QCD di “bassa energia”, in cui le interazioni coinvolgono gli adroni e non individualmente i quark ed i gluoni “confinati” al loro interno. La QCD non può essere risolta in tale regime. Occorre dunque utilizzare strumenti diversi, che traggono radici dalle idee messe a punto prima della scoperta della QCD stessa e legate essenzialmente ai vecchi modelli a quark di sapore riadattate in modo moderno e profondo al regime “non perturbativo” della teoria. L’idea cruciale alla base di tale settore della QCD, noto come “Chiral Perturbation Theory”, risiede nell’osservazione secondo la quale le simmetrie presenti nella lagrangiana (o almeno alcune di esse) debbano sopravvivere anche nel regime non perturbativo e non siano piuttosto completamente “distrutte” dalle fluttuazioni quantistiche. L’esempio per antonomasia è fornito dallo studio degli adroni a bassa energia. I quark hanno masse che dipendono dall’accoppiamento con l’Higgs, e che tuttavia non sono direttamente osservabili perchè gli stessi quark sono confinati negli adroni. Le masse possono comunque essere stimate utilizzando alcune ampiezze di diffusione. Assumendo, ad esempio, che u e d abbiano masse identiche, si potrebbe utilizzare per descrivere protoni e neutroni la vecchia teoria dell’isospin, in cui protone e neutrone facciano parte di un doppietto di $SU(2)$ (l’isospin, appunto). A causa della struttura di protone e neutrone, l’isospin non è altro che l’ $SU(2)$ di

sapore tra u e d . In tale limite ideale, i pioni π^+ , π^- e π_0 formerebbero un tripletto. Tuttavia sembra esservi un' incongruenza nella descrizione: le masse dei nucleoni dovrebbero essere circa una volta e mezza quelle dei mesoni. Invece, sperimentalmente, risulta che, ad esempio $m_p/m_\pi \sim 7.7$. In altre parole, le masse dei pioni sono estremamente piccole rispetto a quanto ci si aspetterebbe osservando le masse dei nucleoni. Le masse dei nucleoni stesse, inoltre, non sembrano aver molto a che fare con le masse dei quark costituenti (le stime ad es. per la massa di u e d sono inferiori ai 10 MeV). Ciò non può sorprendere poichè, come visto, nella teoria di gauge l'unica scala di massa è introdotta attraverso la trasmutazione dimensionale. Il meccanismo che spieghi la piccola massa dei pioni non può che essere di origine dinamica. Nel limite ideale di quark privi di massa, la simmetria $SU(2)$ di sapore tra u e d sarebbe esatta.⁹ Quando, mettendo a zero una quantità fisica, si ottiene un allargamento della simmetria, la simmetria stessa "protegge" il naturale valore nullo (o molto piccolo) di quella quantità. In altre parole, le correzioni quantistiche, che porterebbero i parametri piccoli ad essere proporzionali alle scale naturali (grandi), sono vietate. Le masse dei pioni sono così piccole perchè nel limite di masse nulle sarebbe presente una simmetria aggiuntiva. La QCD con due sapori, in realtà, avrebbe in partenza come simmetria esatta addirittura $U(2) \times U(2)$, quella che ruota naturalmente tra loro i due spinori complessi nella lagrangiana di Dirac a massa nulla. È conveniente decomporre tale gruppo nel modo seguente, del tutto equivalente: $SU(2)_V \times U(1)_V \times SU(2)_A \times U(1)_A$, dove V ed A stanno per parte vettoriale ed assiale. Si tratta di combinare i generatori del gruppo di partenza in modo che i parametri risultanti siano la somma o la differenza dei parametri iniziali. Le corrispondenti correnti conservate corrispondono ai seguenti bilineari:

$$J_\mu^a = \bar{\psi} \gamma^\mu \sigma^a \psi \quad \text{isospin ;} \quad (2.11)$$

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{corrente barionica ;} \quad (2.12)$$

$$J_\mu^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \sigma^a \psi \quad \text{corrente vettoriale - assiale ;} \quad (2.13)$$

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad \text{corrente assiale .} \quad (2.14)$$

Se questa simmetria fosse una simmetria del vuoto e dunque della natura, dovrebbero però esistere stati in rappresentazioni di questi gruppi. L' $SU(2)_V$ corrisponde all'equivalenza tra p e n nel limite di massa nulla, ed è ben osservata in natura, così come l' $U(1)_V$, che corrisponde al numero barionico (il numero di nucleoni). Viceversa, l' $SU(2)_A$ non può essere esatta, poichè richiederebbe, ad esempio, la presenza di multipletti degeneri di nucleoni con parità opposta, mai osservata in natura. Si congetture che i quark confinati formino un condensato (uno stato legato) il cui vev nel vuoto rompa spontaneamente la simmetria $SU(2)_A$. I tre stati "pseudoscalari" a massa nulla corrispondenti ai tre generatori sono identificati con i pioni. Le masse dei quark rompono esplicitamente, ma in modo "lieve", la simmetria $SU(2)_A$. Se essa fosse esatta, i pioni sarebbero i bosoni di Goldstone a massa nulla. La violazione "lieve" della simmetria fa sì che essi acquistino una massa, destinata tuttavia a restare piccola grazie alla "protezione" della simmetria assiale. Tale PCAC (Partial Conservation of Axial Current) può essere usata per ottenere alcune regole di somma molto importanti, costruendo una teoria "effettiva" in cui i gradi di libertà siano direttamente nucleoni e pioni, il cosiddetto "modello sigma". In tal

⁹Va detto, osservando lo spettro delle risonanze adroniche, che una buona approssimazione sarebbe una simmetria fra 3 quark, includendo l' s insieme all' u e al d . Non vi è invece traccia di una simmetria più larga, sebbene in QCD, nel limite di massa nulla, si dovrebbe essere in presenza di una simmetria che ruota tutti e sei i quark, ovvero $SU(6)$. Ovviamente, l'approssimazione non funziona bene per i quark c , b e t , che hanno masse enormemente più grandi delle masse degli altri quark "leggeri". Per una discussione qualitativa, ci si può limitare al caso di $SU(2)$ con due soli quark, trascurando s .

modo alcune quantità fenomenologicamente rilevanti possono essere introdotte e misurate. Ad esempio, la cosiddetta costante di decadimento del pione, f_π , che misura la violazione nella conservazione della corrente assiale

$$\partial_\mu J_a^{\mu 5} = m_\pi^2 f_\pi \Phi_a \quad , \quad (2.15)$$

dove Φ_a è un operatore pseudoscalare che può essere pensato come il campo del pione, vale $f_\pi \sim 93 \text{ MeV}$. Un'altra conseguenza molto importante, la relazione di Goldberger e Treiman, riguarda il rapporto tra le masse di nucleoni e pioni, che secondo PCAC, almeno approssimativamente, predice per il nucleone

$$M_N = C f_\pi \quad (2.16)$$

dove C è una costante fenomenologica che vale circa 11. Si osservi che i termini di massa dei quark che entrano nella lagrangiana e rompono la simmetria globale in modo “lieve”, che si dicono in genere termini di massa dei quark delle correnti, non hanno a che vedere con le masse effettive che la QCD assegna invece ai quark che costituiscono gli adroni, dette “masse costituenti”. Ad esempio, le masse costituenti dei quark che formano il protone sono ovviamente circa un terzo della massa del protone.

Il chiarimento del ruolo dell' $U(1)_A$ (Problema $U(1)_A$), invece, è assai più complesso e sorprendente, e verrà affrontato in dettaglio nel prossimo paragrafo.

2.5 Problema $U(1)_A$, Anomalie ed Istantoni

Se l' $U(1)_A$ fosse una simmetria esatta, dovrebbe esistere ad esempio un partner scalare per il pione (che è uno pseudoscalare) con una massa approssimativamente dello stesso ordine di grandezza, dovuta alla menzionata rottura “lieve” della simmetria. Tale partner non esiste. D'altra parte, se l' $U(1)_A$ fosse spontaneamente rotto, dovrebbe esistere un bosone di Goldstone a massa nulla nel limite esatto, con una massa dello stesso ordine di grandezza della massa del pione, tenendo conto delle masse dei quark. Ebbene, tale particella non esiste nello spettro adronico. Cosa ne è, dunque, dell' $U(1)_A$? L'assenza di tale simmetria è nota come “Problema $U(1)_A$ ”, e la spiegazione richiede un sottile e sublime intreccio di effetti quantistici molto importanti, noti come anomalie ed istantoni.

Una simmetria continua classica della lagrangiana, secondo il teorema di Noether, produce una corrente conservata. È dunque sempre una simmetria del livello “ad albero” della teoria quantistica. Tuttavia, può accadere che non venga rispettata dalle fluttuazioni quantistiche, dalle correzioni dovute ai “loop”. Come osservato nel paragrafo 2.2, i loop producono in genere divergenze ultraviolette, che, laddove possibile, vanno sottratte con la procedura di regolarizzazione e rinormalizzazione. Se esiste una regolarizzazione in grado di preservare ad ogni passo la simmetria, essa è certamente rispettata anche dalle correzioni quantistiche. Esistono delle simmetrie, tuttavia, per le quali è impossibile trovare una regolarizzazione che le preservi. Quando il cut-off viene rimosso, tali simmetrie possono dar luogo a delle “anomalie”, ovvero a delle violazioni di leggi di conservazione valide nella teoria classica. Un esempio di anomalia è stato già illustrato, la trasmutazione dimensionale. La costante di accoppiamento, classicamente, è appunto una costante, indipendente dalla scala alla quale la si misura. Vi è dunque una invarianza di scala legata alla costante d'accoppiamento. La regolarizzazione, tuttavia, richiede sempre l'introduzione di un cut-off che inevitabilmente la distrugge. Il risultato

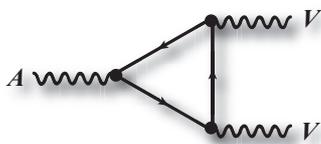


Figura 2.8: Diagramma a “triangolo”.

è un’anomalia che si manifesta nel fatto che la costante di accoppiamento quantistica non sia più costante ma dipenda dalla scala alla quale la si misura. L’invarianza di scala è “anomala”, la legge di conservazione classica

$$dg/d\mu = 0 \quad (2.17)$$

è violata e deve essere sostituita dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione (2.6). Un altro esempio di simmetria inevitabilmente violata dalla regolarizzazione è la simmetria chirale. La massa (e dunque una scala) rompe l’invarianza chirale. In presenza della sola violazione della simmetria chirale, la corrente può tuttavia essere ridefinita in una nuova corrente conservata. In presenza invece sia di correnti assiali che di correnti vettoriali, è impossibile eliminare da entrambe il termine anomalo. Infatti, i diagrammi in cui l’anomalia chirale si manifesta sono quelli con loop interni triangolari¹⁰ ai vertici dei quali sono attaccate, ad esempio, due correnti vettoriali ed una corrente assiale, come in figura 2.8. Le correnti anomale possono essere legate a simmetrie globali oppure a simmetrie di gauge. Nel primo caso esse rappresentano delle violazioni innocue ed anzi a volte “utili” della teoria. Ad esempio, la simmetria $SU(2)_A$ è non solo spontaneamente rotta dal condensato chirale, è non solo rotta esplicitamente in modo lieve dalle masse, ma è anche anomala. Tale anomalia si manifesta, ad esempio, nel processo $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Nel limite chirale, senza anomalia, tale processo, anche nell’ipotesi PCAC, risulterebbe proibito, vale a dire il “rate” di decadimento sarebbe zero. Viceversa, grazie all’anomalia, tale “rate” si può calcolare e produce un risultato in ottimo accordo con il valore misurato negli esperimenti. Un discorso diverso vale per le anomalie nelle correnti di gauge. Tali anomalie sono molto pericolose perchè minano la consistenza interna, rovinando l’unitarietà e la rinormalizzabilità e rendendo la teoria intrinsecamente “malata”, e vanno dunque cancellate. La loro presenza dipende dalle rappresentazioni dei fermioni chirali sia in teorie di gauge abeliane che non abeliane. Dai diagrammi a triangolo, si può dedurre che le varie anomalie sono proporzionali a fattori di teoria dei gruppi della forma

$$\sum_{T_L} STr[T_L^a T_L^b T_L^c] - \sum_{T_R} STr[T_R^a T_R^b T_R^c] \quad , \quad (2.18)$$

dove STr significa la traccia presa sulla combinazione totalmente simmetrica per scambio dei tre indici a, b e c , e T_L (T_R) indica il generatore del gruppo cui appartiene il fermione

¹⁰Questo è vero in quattro dimensioni. Si possono studiare le anomalie in teorie in dimensione $2n$, ed in tal caso i diagrammi anomali sono quelli in cui compaiono poligoni con $n + 1$ lati: in dieci dimensioni, ad esempio, i diagrammi ad esagono.

chirale sinistro (destra). Poichè il fermione destro è nella rappresentazione coniugata rispetto a quella del fermione sinistro, l'anomalia può essere presente soltanto qualora il gruppo di gauge ammetta rappresentazioni complesse (ovvero non equivalenti alle complesse coniugate). Questo accade, nel Modello Standard, per i gruppi $U(1)$ ed $SU(3)$. Il gruppo $SU(2)$ ha rappresentazioni cosiddette "pseudoreali", quindi è privo di anomalie pure, contributi al termine (2.18) dovuti interamente a generatori di $SU(2)$. Se i gruppi di gauge hanno rappresentazioni complesse, l'anomalia si può cancellare in virtù del fatto che la somma dei contributi di tutti i fermioni presenti sia zero. Questo è il caso del Modello Standard, ove esistono ovviamente anomalie pure $U(1)$, pure $SU(3)$ e miste fra i tre gruppi di gauge. Ad esempio nel caso dell'anomalia pura $U(1)$, il contributo all'equazione (2.18) deriva semplicemente dalla differenza tra i cubi delle cariche $U(1)$ sinistre ed i cubi delle destre. Guardando la tabella 2.2 ed osservando i campi nella prima famiglia, si ottiene:

$$\begin{aligned} 3 \times 2 \times (1/6)^3 &+ 1 \times 2 \times (-1/2)^3 \\ -1 \times 1 \times (1)^3 &- 3 \times 1 \times (-2/3)^3 - 3 \times 1 \times (1/3)^3 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il contenuto di campi di ciascuna famiglia è dunque tale da cancellare l'anomalia. La cancellazione, che appare assai "miracolosa", nasconde forse una indicazione di fisica oltre il MS, come si vedrà nei prossimi capitoli. Da sottolineare che anche se l'anomalia sembrerebbe comparire ad ogni ordine di teoria delle perturbazioni, la cancellazione ad un loop ne garantisce l'assenza ad ogni ordine superiore. La motivazione profonda risiede nel fatto che la vera natura dell'anomalia è legata a proprietà molto profonde (topologiche) dell'operatore di Dirac. In particolare, ai teoremi dell'indice di Atiyah, Patodi e Singer, che calcolano le differenze nel numero di autovalori nulli sinistri e destri dell'operatore stesso. Tale argomento, tuttavia, non può essere approfondito in questa sede.

La simmetria $U(1)_A$ è anomala. Tuttavia, come sottolineato in precedenza, è possibile ridefinire la corrente anomala in una nuova corrente conservata. Di conseguenza, il dilemma non è completamente risolto. Il punto cruciale sta nel fatto che la nuova corrente viola alcune trasformazioni di gauge non connesse all'identità (trasformazioni "grandi"). Tali trasformazioni si manifestano non appena la teoria ammetta delle particolari configurazioni del campo che rappresentano soluzioni classiche ad energia finita delle equazioni del moto, note come solitoni. Un campo massivo libero ammette soluzioni che dissipano energia nel tempo. Nel caso di teorie interagenti non lineari, possono tuttavia esistere soluzioni "stabili" in cui la dissipazione è compensata dalla non-linearità. Tali "solitoni" appaiono come pacchetti di energia finita e localizzata che risultano stabili, o che richiedono molta energia per essere deformati. La motivazione profonda della loro stabilità risiede di nuovo nell'esistenza di una carica "conservata", questa volta di natura topologica, legata puramente alle particolari configurazioni che il campo può assumere. L'energia (e dunque la massa) dei solitoni dipende da potenze inverse della costante di accoppiamento. Un esempio è fornito dai monopoli magnetici, per i quali la carica magnetica coincide esattamente con la carica topologica. In regime perturbativo, quando la costante d'accoppiamento è piccola, i solitoni sono molto pesanti e non compaiono nello spettro della teoria. Sono, come si suol dire, non perturbativi. Nei regimi in cui la costante d'accoppiamento diventa grande, viceversa, sono leggeri e possono, a tutti gli effetti, essere interpretati come "quanti", gradi di libertà ulteriori che vanno tenuti in considerazione.

I solitoni che si vogliono menzionare, in realtà, sono di tipo ancora diverso. Essi riguardano soluzioni classiche della teoria "descritta nell'euclideo", vale a dire dopo che la direzione tempo-

rale viene resa complessa¹¹. Sono soluzioni localizzate sia nello spazio che nel tempo (euclideo), e per questo dette “istantoni”. La loro presenza, pur non essendo legata ad ulteriori quanti nello spettro, gioca un ruolo fondamentale nella definizione della QCD. Accade infatti che il vuoto, lo stato di minima energia, non sia unico ma degeneri, come nel caso di un potenziale “periodico”. Il “vero” vuoto emerge come lo stato di minima energia risultante dalla sovrapposizione degli infiniti vuoti degeneri. A causa dell’“effetto tunnel”¹² esso sarà descritto da un nuovo parametro θ , che ne riassume le proprietà. Gli istantoni sono soluzioni che interpolano fra i diversi settori topologici *cambiando la struttura del vuoto della QCD* che ne è la sovrapposizione. La presenza degli istantoni rompe (come si suol dire “dinamicamente”) la simmetria $U(1)_A$, spiegandone l’assenza manifesta e risolvendo in tal modo il problema $U(1)_A$. Nel limite esatto chirale, il parametro che determina il vuoto della QCD può essere reso nullo mediante una trasformazione di chiralità. Tuttavia, in presenza dei termini di massa che rompono “lievemente” la simmetria chirale, il parametro θ (o meglio un parametro θ_{eff} dato dalla combinazione di θ con le masse) non può più essere messo a zero. La soluzione del problema $U(1)_A$ attraverso gli istantoni solleva così un nuovo problema: dovrebbe comparire nella Lagrangiana del MS un “ θ -termine”

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \quad , \quad (2.20)$$

ove \tilde{F} è il tensore “duale” di F , definito dalla relazione

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.21)$$

ove $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ è il simbolo di Levi-Civita a quattro indici (App. A.2). Il θ -termine da un lato è una derivata totale senza effetti sulla dinamica. Dall’altro è un termine che viola la simmetria \mathcal{CP} . Gli effetti della violazione sarebbero evidenti sperimentalmente. Ad esempio, dal momento di dipolo elettrico del neutrone si ricava un limite superiore pari a $\theta < 10^{-9}$, molto piccolo. Come nel caso della massa dei pioni, un θ così piccolo richiede un innaturale “fine tuning” oppure una simmetria che lo “protegga”. Come mostrato da Peccei e Quinn, una simmetria $U(1)$ aggiuntiva che protegga θ dovrebbe essere spontaneamente rotta e produrrebbe un ulteriore bosone di Goldstone a massa nulla nello spettro, il famoso “assione”. Per il momento non ve n’è alcuna evidenza sperimentale, anche se gli assioni spesso emergono come le predizioni più comuni della fisica oltre il Modello Standard ed in particolare delle teorie di stringhe.

2.6 Parametri del Modello Standard e Problemi Aperti

Come emerge dall’analisi breve ed incompleta dei precedenti paragrafi, non esistono esperimenti che contraddicano il Modello Standard (trascurando l’interazione gravitazionale ed ora anche le misure sulle oscillazioni dei neutrini). Tuttavia, l’unificazione delle interazioni elettrodeboli e forti appare solo “parziale”. Inoltre, il MS possiede un numero assai elevato di parametri liberi che non vengono in alcun modo predetti dalla teoria e devono essere inseriti “a mano” dal confronto delle quantità calcolate con gli esperimenti. Il gruppo di gauge è un prodotto di

¹¹La procedura è detta “rotazione di Wick”, e trasforma lo spazio-tempo di Minkowski nello spazio euclideo quadridimensionale.

¹²In Meccanica Quantistica, per “effetto tunnel” si intende una probabilità non nulla di trovare una particella anche in zone dello spazio che classicamente sarebbero “inaccessibili”.

tre fattori, ciascuno dei quali possiede una propria costante d'accoppiamento. Le costanti si indicano di solito con g_S (per le interazioni forti), g per le interazioni deboli e g' per l'iper carica. Introducendo l'angolo di Weinberg θ_W e la carica elettrica dell'elettrone $-e$, valgono (ad albero) le relazioni seguenti

$$g \sin(\theta_W) = e \quad , \quad (2.22)$$

$$g' \cos(\theta_W) = e \quad . \quad (2.23)$$

È possibile scegliere tre parametri indipendenti tra i cinque introdotti (di solito si tengono q , θ_W e g_S). L'introduzione del campo di Higgs è accompagnata da ben tre parametri liberi, i termini quadratico ($-\mu^2$) e quartico (λ) del potenziale di Higgs (App. A.11) ed il valore d'aspettazione nel vuoto v , legati dalla relazione $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Da essi dipendono la massa dell'Higgs, che risulta $(-2\mu^2)^{1/2}$, e le masse dei bosoni intermedi W_{\pm} e Z_0 , rispettivamente pari a $vg/2$ e $vg/2\cos(\theta_W)$, nonché la costante di Fermi delle interazioni deboli, che risulta dalla relazione $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2}$. Le masse dei campi di materia, come descritto nel paragrafo 2.1, sono legate a v attraverso accoppiamenti arbitrari, i famosi "Yukawa couplings", indicati di solito con λ_ℓ , λ_ν e λ_q rispettivamente per leptoni, neutrini e quark, e risultano:

$$m_i = \frac{v\lambda_i}{\sqrt{2}} \quad . \quad (2.24)$$

Nel MS, i neutrini sono privi di massa. Per ogni famiglia occorre specificare la massa del leptone e le masse dei quark corrispondenti. Inoltre, la matrice di CKM contiene quattro parametri arbitrari, tre angoli di mixing e la fase di violazione di CP. Infine, il " θ -termine" va inserito per effetto degli istantoni.

Ricapitolando: tre costanti d'accoppiamento, due parametri di Higgs, una massa del leptone e due masse di quark per ogni famiglia (in totale dunque nove), quattro parametri di mixing per la matrice CKM ed il θ -termine. In totale ben diciannove parametri liberi che ovviamente aumenterebbero se si volessero includere le masse dei neutrini (dai recenti esperimenti sulle oscillazioni dei neutrini, infatti, almeno due dei tre neutrini devono essere massivi. È questa una prima indicazione sperimentale di fisica oltre il MS). L'unico tassello che ancora manca alla verifica sperimentale del MS è il bosone di Higgs. Negli esperimenti al collider LEP del CERN, il bosone di Higgs non è stato rivelato, ed il limite attuale sulla sua massa, o meglio sulla massa del grado di libertà scalare che nella sua rappresentazione più semplice è la particella di Higgs, risulta essere $m_H \leq (\sim 114\text{GeV})$. Vi è anche un limite superiore, che dalle misure di precisione a LEP-2 ed includendo le correzioni radiative risulta essere di circa 200 GeV. I limiti consentono di affermare che con ogni probabilità la particella di Higgs sarà vista ad LHC, che ne dovrebbe anche definire l'esatta natura.

Le misure di precisione effettuate a LEP hanno confermato le predizioni del MS oltre ogni aspettativa. Non è esagerato affermare che nessun segnale di nuova fisica oltre il MS è stato rilevato a LEP. L'estrema coerenza del MS, in qualche modo, dimostra indirettamente l'esistenza del meccanismo di rottura spontanea di simmetria con insieme la presenza della particella di Higgs leggera e la certezza che il campo di Higgs effettivo che partecipa alla rottura spontanea della simmetria elettrodebole, sia esso scalare, composto o parte di multipletti più grandi, debba essere un doppietto dell' $SU(2)_L$. Dati gli evidenti successi del Modello Standard, sintesi mirabile dei dati sperimentali raccolti lungo l'arco del XX secolo, si potrebbe pensare, una volta trovata la particella di Higgs, di porre la parola fine allo studio della fisica delle particelle. Tuttavia, il MS, seppur verificato completamente, non sarebbe pienamente soddisfacente, almeno

per il gusto scientifico ed estetico di molti, tra cui il sottoscritto. L'arbitrarietà degli almeno 19 parametri liberi dovuta, in ultima analisi, al fatto che il MS sia una teoria rinormalizzabile, non è l'unica fonte di frustrazione. Infatti, ad esempio, non vi è alcuna spiegazione del perchè il gruppo di gauge sia quello che è, della struttura della rottura spontanea della simmetria, nonchè dell'assegnazione dei numeri quantici. La carica elettrica, che in natura è quantizzata, appare fra i parametri arbitrari e può assumere in linea di principio ogni valore reale. Il MS, piuttosto che la teoria "fondamentale", appare come la sovrapposizione di tre settori tra loro mescolati ma ciascuno con la propria struttura e costante d'accoppiamento. Infine, la struttura delle masse è assolutamente misteriosa, e molti dei rapporti appaiono assai innaturali. Ad esempio, i neutrini sono molto più leggeri dei leptoni, il quark top è 10^6 volte circa più pesante del quark up, i leptoni ed i quark leggeri hanno una massa molto piccola rispetto ai bosoni vettori W e Z, relativa ad una enorme differenza tra i "couplings" di Yukawa e quelli di gauge. Rapporti così grandi non hanno nulla di "errato", ma sembrano assai "innaturali" in assenza di un qualche meccanismo che possa mantenere una gerarchia di scale.

Il MS soffre palesemente di un ulteriore grave inconveniente, dal punto di vista di chi scrive il più importante: non descrive le interazioni gravitazionali. E' assai arduo credere che il MS possa essere estrapolato, nelle previsioni, a scale di energia molto più grandi della scala elettrodebole, e dunque la sua incompletezza risulta evidente laddove si vogliono studiare fenomeni ad energie che si avvicinino alla scala di Planck, ove le interazioni gravitazionali risultano dello stesso ordine di grandezza delle altre. Se si pensasse di aggiungere al MS la Relatività Generale, si otterrebbe una teoria che descrive le quattro interazioni ma che non descrive le fluttuazioni quantistiche (Cap. 3), pur avendo un "range" di validità assai ampio. Appare dunque naturale interpretare il MS corredato della Relatività Generale come una "teoria effettiva", ovvero la manifestazione alla scala elettrodebole di una teoria "fondamentale", che possibilmente sia in grado di descrivere tutte le interazioni nel regime quantistico. La semplice esistenza della gravità pone seri problemi al MS. Si può infatti calcolare l'energia di vuoto relativa al valore che rende minimo il potenziale. In assenza di gravità, tale termine è una costante priva di significato fisico. Viceversa, in presenza di gravità essa diviene un termine di Costante Cosmologica. Per molto tempo si è pensato che la Costante Cosmologica fosse zero, e che l'Universo fosse piatto. Recenti osservazioni dimostrano che l'Universo è in espansione accelerata e che la Costante Cosmologica, pur piccola, risulti positiva. Lo spazio-tempo sarebbe dunque uno spazio di de Sitter. Il valore che emerge dal calcolo dell'energia di vuoto nel MS è enorme. Per "aggiustare" il valore ottenuto al valore osservato, ci vuole un "fine tuning" che nel caso più favorevole risulta di 33 ordini di grandezza (il valore va corretto per una parte su 10^{33}). Nell'ambito del MS, inoltre, non vi è modo di accomodare l'asimmetria materia-antimateria presente nell'Universo. L'introduzione della gravità e della corrispondente scala di Planck pone inoltre un ulteriore serio problema di "fine tuning". La scala di Planck può essere pensata parametrizzare la nostra ignoranza sulla fisica del MS ad alte energie, ovvero rappresentare in qualche modo il "cut-off" naturale della teoria. Le correzioni quantistiche, nel MS, dipendono dal cut-off. Nell'ambito del MS non è possibile spiegare perchè la scala elettrodebole si mantiene così piccola (10^{17} ordini di grandezza inferiore) rispetto alla scala del cut-off. Il campo di Higgs del MS è un campo scalare fondamentale, la cui massa ottiene correzioni quantistiche che crescono come il quadrato del cut-off e quindi sono enormi. Viceversa, le correzioni alle masse dei fermioni sono logaritmiche nel cut-off, essendo "protette" dalla simmetria chirale. Di nuovo, nulla vieta di aggiustare di volta in volta la scala elettrodebole "a mano", ma l'elevato "fine tuning" appare assai innaturale (problema della gerarchia).

Le speranze sono riposte nella possibilità che la teoria che descrive la gravità quantistica, contenga al suo interno la soluzione dei problemi di naturalezza e non costringa gli scienziati a ricorrere al cosiddetto “principio antropico”¹³. L’unico schema di cui oggi si dispone è la teoria di stringhe. Per descriverla opportunamente, è indispensabile preventivamente rivedere quel che è noto sull’interazione gravitazionale.

¹³Il principio antropico, semplificando al massimo, consiste nell’idea che alcuni parametri che compaiono in natura siano fissati ai valori misurati perchè altri valori non consentirebbero l’esistenza della vita e dunque di osservatori che possano interrogarsi sul perchè quei valori siano quelli che sono. In altri termini, una variazione anche piccola delle costanti della natura, renderebbe impossibile l’esistenza della vita, almeno nelle forme in cui la si conosce.

Capitolo 3

La Gravità

In questo capitolo verrà data qualche nozione introduttiva e qualitativa sulla Relatività Generale, sulle sue conseguenze e sui tentativi per costruirne una versione quantistica. Ovviamente, l'apparato matematico necessario, quello della geometria Riemanniana, è troppo complicato per essere esposto in questo corso. Alcune nozioni necessarie ad illustrare le idee ed i risultati saranno tuttavia riportate nelle appendici tecniche.

3.1 Relatività Generale

La forza di gravità è stata la prima forza fondamentale della natura ad essere scoperta, codificata e descritta nella famosa legge di gravitazione universale di Newton. La legge si basa sul cosiddetto Principio di Equivalenza, l'osservazione secondo la quale la “carica gravitazionale” (o massa gravitazionale), l'attributo posseduto dai corpi che interagiscono gravitazionalmente, coincide con la loro massa inerziale, la grandezza che entra nelle leggi che regolano il moto dei corpi. L'equivalenza fu scoperta da Galileo nel corso dei famosi esperimenti sul moto di corpi lungo un piano inclinato. Il principio di equivalenza è stato più volte verificato con accuratezza crescente. Modernamente, a partire dal famoso esperimento della bilancia di torsione di Eötvös del 1889, la coincidenza fra massa gravitazionale e massa inerziale è stata confermata con una precisione di una parte su 10^{11} . L'equivalenza tra i due tipi di massa ha conseguenze drammatiche e spettacolari. La forza di gravità tra due punti materiali di masse m_1 ed m_2 è proporzionale al prodotto delle masse e segue un andamento che, come verificato da Newton e confermato dalle osservazioni di Keplero, diminuisce col quadrato della distanza:

$$F_{12} = - G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

In eq. (3.1) G_N è la costante di gravitazione universale di Newton, già introdotta nel Cap. 2. La forma è molto simile a quella dell'interazione Coulombiana fra cariche elettriche, ed evidenzia il “range infinito” dell'interazione. Il segno negativo, essendo le masse positive, sta ad indicare che la forza di gravità è sempre attrattiva e non può essere schermata: la struttura su grande scala dell'Universo, dove la quantità di materia coinvolta è enorme, è quindi dominata dall'interazione gravitazionale. L'eq. (3.1) traduce il Principio di Equivalenza. Newton osservò che la legge deve essere, appunto, universale, la stessa per la caduta dei gravi sulla terra così come per la gravitazione dei corpi celesti. In conseguenza dell'eq. (3.1), ogni corpo si muove in un campo gravitazionale subendo la stessa accelerazione, indipendente dalla massa del corpo stesso (una

verifica molto spettacolare di questo principio è stata prodotta dagli astronauti sulla luna: in assenza di atmosfera un martello ed una piuma, lasciati cadere contemporaneamente, toccano il suolo nello stesso istante!). L'interazione gravitazionale descritta dall'equazione di Newton, ovviamente, presuppone un tempo assoluto ed una trasmissione dell'interazione "istantanea". Cambiando la configurazione delle masse, istantaneamente cambia la forza da esse prodotta. La teoria della Relatività Speciale di Einstein, al contrario, dimostra che esiste un limite superiore, la velocità della luce c^1 , alla velocità di propagazione dei segnali e dunque, ovviamente, delle interazioni. Il modo moderno di interpretare una interazione tra punti materiali, come descritto nel Cap. 2, fa uso del concetto di campo. Classicamente, si assume che una determinata distribuzione di masse generi un campo gravitazionale che si propaga nello spazio e nel tempo trasmettendo l'interazione alle altre masse. Ad esempio, il campo elettromagnetico si può descrivere utilizzando un campo di gauge che sia un vettore di Lorentz, la cui curvatura fornisce esattamente il tensore le cui componenti sono i campi elettrico e magnetico (si veda anche l'App. A.9). Per descrivere il campo gravitazionale, occorre introdurre oggetti matematici più sofisticati. Come noto, la formulazione della teoria della Relatività Generale occupò i pensieri ed il lavoro di Albert Einstein per circa una decade, dal 1905 al 1916. Einstein fu molto colpito dal principio di equivalenza ed influenzato dal punto di vista proprio di E. Mach, che rinnegava l'ipotesi di uno "spazio assoluto" a vantaggio di una visione in cui la distribuzione dei corpi possa e debba influenzare lo spazio stesso nel quale il moto avviene. Einstein intuì in modo assolutamente autonomo e geniale, che una formulazione propria del Principio di Equivalenza dovesse richiedere una comprensione profonda della geometria dello spazio-tempo. Egli osservò che un corpo in caduta libera si muove come se fosse in assenza di gravità. L'idea è molto semplice (almeno a posteriori): un osservatore in un ascensore completamente chiuso e in caduta libera, non è in grado di rivelare la presenza del campo gravitazionale (ovviamente trascurando gli attriti dovuti all'atmosfera, ecc.). Viceversa, in assenza di gravità, accelerando l'ascensore verso l'alto l'osservatore sentirà una forza (fittizia) che lo spinge verso il pavimento, del tutto analoga alla forza di gravità. In altre parole, il principio di equivalenza è l'affermazione che (localmente) un campo gravitazionale è assolutamente equivalente ad un sistema di riferimento accelerato. Quindi il moto di una particella massiva che si muove attratta dal campo generato da un'altra particella, deve essere equivalente al moto della prima particella in un opportuno sistema di riferimento accelerato, in cui non vi sia gravità. La traiettoria libera della particella, in presenza del campo, non è dunque più rettilinea ma, in generale, curva. Einstein intuì che la presenza del campo gravitazionale è del tutto equivalente ad una "distorsione" dello spazio-tempo e soprattutto riuscì a formulare in termini matematici l'equivalenza, utilizzando l'apparato della geometria Riemanniana, che tra la fine dell'800 e l'inizio del '900 ebbe uno sviluppo notevolissimo, grazie anche al contributo di alcuni matematici italiani quali G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita.

La gravità è dunque intimamente legata alla geometria stessa dello spazio-tempo. La presenza delle masse modifica la geometria dello spazio-tempo entro il quale i corpi si muovono seguendo le traiettorie consentite dalla geometria distorta. In termini tecnici, il campo gravitazionale è legato al tensore metrico, che descrive la geometria dello spazio-tempo, pensato come una "varietà di Riemann". Il tensore metrico è l'oggetto che, punto per punto, consente di definire il prodotto scalare fra vettori. Dati due vettori x^μ ed y^μ , il loro prodotto scalare risulta $(x, y) = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$, ove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico. Il prodotto scalare consente di deter-

¹La velocità della luce nel vuoto c , una delle costanti fondamentali della natura, risulta essere, come noto, circa $2,997 \times 10^8 m/s$

minare gli angoli e le lunghezze fra vettori, almeno in un opportuno intorno locale di un punto, in cui si possa scegliere un sistema di coordinate. La varietà Riemanniana globale si ottiene poi “incollando” opportunamente e globalmente le varie descrizioni locali. Per la precisione, la metrica fornisce il prodotto scalare fra i vettori dx^μ dello spazio cotangente alla varietà in un certo punto, e ne fornisce l’elemento invariante di distanza. Un esempio già incontrato è lo spazio-tempo di Minkowski, descritto da una metrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esso corrisponde allo spazio-tempo in assenza di campo gravitazionale. Il quadrivettore che rappresenta un intervallo infinitesimo fra eventi nello spazio-tempo Minkowskiano ha una “lunghezza” $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{x}^2$. Il Principio di Equivalenza stabilisce che, in caduta libera, le leggi debbano essere le stesse di quelle in assenza di gravità. Tradotto in termini geometrici, equivale ad affermare che, localmente, debba essere sempre possibile determinare un sistema di coordinate in cui la metrica sia Minkowskiana. Un campo gravitazionale non triviale è allora presente quando tale scelta non può essere fatta per tutta la varietà, che risulta essere curva. La descrizione della “fisica” ovviamente non può dipendere dalla scelta del sistema di coordinate: le grandezze rilevanti devono essere legate a proprietà “intrinseche” della varietà. Il Principio di Equivalenza può dunque essere riformulato nel modo seguente: le leggi della fisica devono essere invarianti (o meglio covarianti) rispetto a ridefinizioni delle coordinate, meglio note come trasformazioni generali di coordinate:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu) \quad . \quad (3.2)$$

Sulle varietà, è assai importante definire opportunamente la nozione di derivata. Infatti, per poter valutare il limite del rapporto incrementale, occorre confrontare i vettori dello spazio cotangente in punti diversi della varietà. Se la varietà è curva, occorre definire una nozione di Trasporto Parallelo sulla varietà, che consenta di confrontare fra loro vettori applicati in punti diversi. A tal scopo, punto per punto, occorre introdurre una funzione che “compensi” la curvatura della varietà. Il lettore attento avrà intuito l’analogia con la procedura di “gaugeing”. In effetti, per definire in Trasporto Parallelo occorre introdurre una “connessione”: in elettromagnetismo, la connessione è esattamente il campo di gauge (App. A.10). In geometria Riemanniana, la connessione consente di introdurre una nozione di derivata, la “derivata covariante”, indipendente dalla scelta del sistema di coordinate e coincidente con l’ordinaria nozione di derivata qualora lo spazio sia Minkowskiano. Per un vettore, ad esempio,

$$D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho \quad . \quad (3.3)$$

La connessione, in altri termini, è una struttura che definisce una derivata che trasformi come un vettore. Il tipo più semplice di connessione che possa essere introdotta è quella detta di “Levi-Civita”, in cui il campo $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ è determinato completamente una volta assegnato il tensore metrico:

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho}) \quad . \quad (3.4)$$

I coefficienti $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ sono detti simboli di Christoffel. La connessione è il campo di gauge della simmetria locale, che in tal caso coincide con il gruppo delle trasformazioni generali di coordinate, mentre il campo dinamico è il tensore metrico. Vale la pena di sottolineare la differenza con le teorie di gauge che compaiono nel MS. In quel caso, infatti, il campo di gauge è sia il campo dinamico che la connessione sulla varietà nota come “fibrato di gauge”.

In una teoria covariante rispetto a trasformazioni generali di coordinate, possono essere introdotte soltanto “grandezze” che non dipendano dalla scelta del sistema di riferimento, quindi costruiti di vettori, tensori e derivate covarianti. Tra questi, un ruolo assai importante è giocato dal tensore di curvatura. Si consideri, ad esempio, una sfera. Se si trasporta parallelamente a se stesso un vettore lungo un tratto di meridiano e poi un tratto di parallelo, si ottiene un vettore diverso da quello che si ottiene trasportando lo stesso vettore prima nel tratto analogo di parallelo e poi nel tratto analogo di meridiano. In altri termini, su una varietà curva come una sfera, le derivate covarianti in generale non commutano. Nello spazio piatto, viceversa, ogni vettore è sempre parallelo a se stesso. Il commutatore di due derivate covarianti sarà quindi una misura della curvatura della varietà. Esso corrisponde ad un tensore a quattro indici $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$, il tensore di Riemann, che in quattro dimensioni possiede 14 componenti indipendenti. Dal tensore di Riemann può essere derivato il “tensore di Ricci” $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}\mathcal{R}_{\alpha\gamma\beta\delta}$ e lo “scalare di curvatura” $\mathcal{R} = g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, che giocano un ruolo fondamentale nella dinamica del campo gravitazionale.

La quantità e la distribuzione di materia che determina il campo gravitazionale può essere allo stesso modo descritta introducendo un tensore, il celebre tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$, che generalizza a spazi curvi la nozione di quadrimomento utilizzata nello spazio di Minkowski. Così come la covarianza rispetto al gruppo di Poincarè conduce, via il teorema di Nöther, alla conservazione del quadrimomento, la covarianza rispetto a trasformazioni generali di coordinate conduce per la stessa via alla conservazione del tensore energia-impulso, che riassume in sé il contenuto di materia. Il tensore energia-impulso è la grandezza matematica che consente di mettere in pratica l’idea di Einstein combinando la geometria al principio di equivalenza. Le famose equazioni di Einstein

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.5)$$

descrivono la dinamica del campo gravitazionale $g_{\mu\nu}$ di cui $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore di curvatura, generato da una distribuzione di materia descritta dal tensore $T_{\mu\nu}$. Vale la pena osservare, prima di tutto, che le equazioni di Einstein si riducono alla legge di Newton nel limite in cui il campo gravitazionale sia statico e debole. In simili condizioni, la metrica devia “poco” dalla metrica piatta. In presenza di un potenziale gravitazionale $V(r)$, tipicamente della forma $V = G_N M/r$, le componenti della metrica risultano essere $g_{00} = (1 - 2V/c^2)$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$. Infatti, il moto di una particella libera immersa in una varietà curva si svolge lungo le geodetiche, le linee “più brevi” tra due punti sulla superficie. Le geodetiche sono l’analogo delle rette nello spazio euclideo tridimensionale (che, ovviamente, è piatto). L’equazione delle geodetiche per il caso della metrica statica, si riduce all’equazione di Newton $f_i = -\partial_i V$, rivelando la consistenza della scelta precedente. Sostituendo la metrica nelle equazioni di Einstein si ottiene l’equazione corretta per il potenziale gravitazionale V , l’equazione di Poisson, nella forma $-\Delta V = 4\pi G_N T_{00}$, ove Δ è il Laplaciano e T_{00} coincide naturalmente con la densità di massa.

Le equazioni di Einstein, tuttavia, sono molto più generali e forniscono correzioni alle leggi non relativistiche e predizioni relative a nuovi fenomeni. Einstein stesso propose dei “test” che potessero comprovare la correttezza delle equazioni di campo attraverso verifiche sperimentali. Ad esempio, la Relatività Generale prevede orbite ellittiche per sistemi “legati”, che tuttavia non sono “statiche” bensì caratterizzate da uno spostamento del “punto iniziale”, la cosiddetta precessione del perielio. L’effetto è molto piccolo, ad esempio per Mercurio la precessione è di circa 43 secondi di arco per secolo. Nel 1943 Clemence, analizzando i dati delle orbite di Mercurio raccolti fin dal 1700, fu in grado di verificare l’accordo con quanto previsto dalla

teoria di Einstein. Un effetto ancor più spettacolare riguarda la deflessione dei raggi di luce. I fotoni non hanno massa, come visto nel Cap. 2, ma sono “pacchetti” d’energia, che alla massa è equivalente, come indicato dalla più celebre delle equazioni di Einstein. I fotoni possono essere “attratti” gravitazionalmente da grandi masse di materia, ovvero i raggi di luce possono deviare dal loro percorso “rettilineo”. Di nuovo, l’effetto è molto piccolo, ma può essere rilevato in condizioni favorevoli. Ad esempio, osservando stelle molto lontane che si vengano a trovare in prossimità del sole durante una eclissi, è possibile constatare che le stelle sembrano occupare una posizione diversa da quella che si osserva nel cielo quando il sole non è in traiettoria. L’apparente spostamento è esattamente dovuto alla deflessione dei fotoni provenienti dalle stelle lontane. Le prime osservazioni risalgono addirittura al 1919, quando furono scoperte deflessioni per una dozzina di stelle in ottimo accordo con le previsioni della Relatività Generale.

Un’ultima predizione importante concerne le famose onde gravitazionali. Non dovrebbe sorprendere, vista l’analogia con l’elettromagnetismo, che le equazioni della Relatività Generale ammettano soluzioni in forma di “radiazione”, ossia di campi che soddisfano l’equazione delle onde. Tali soluzioni possono essere ricavate linearizzando la metrica “vicino” alla metrica piatta, ossia sviluppando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (con η la metrica di Minkowski) e trascurando i termini non-lineari di ordine superiore in h . L’equazione delle onde si ottiene scegliendo opportunamente la forma del tensore metrico². Le onde elettromagnetiche non sono state ancora rivelate, a causa ovviamente dell’estrema “debolezza” dell’interazione gravitazionale, nonostante i molti progressi degli ultimi anni nelle tecnologie relative alle antenne gravitazionali. Il campo d’onda gravitazionale possiede due sole polarizzazioni, esattamente come il campo elettromagnetico. Tuttavia, quando si ruota il sistema di coordinate, tali polarizzazioni ruotano una nell’altra con angolo doppio rispetto al caso dell’elettromagnetismo. Come conseguenza, l’eventuale “quanto”, il gravitone, deve essere privo di massa (fatto testimoniato anche dal “range” infinito dell’interazione gravitazionale) e deve avere spin 2 e non spin 1 come gli altri mediatori. Del resto, il gravitone non è un campo vettoriale ma una metrica, un tensore simmetrico a due indici del gruppo delle trasformazioni generali di coordinate.

3.2 Il Modello Standard Cosmologico

La distribuzione di materia, come sancito dalle equazioni di Einstein (3.5), determina la geometria dello spazio-tempo, sia localmente che globalmente. Sin dalla formulazione della Relatività Generale nel 1916, si sono cercate soluzioni delle equazioni (3.5) che possano descrivere l’intero Universo, suggerendo così possibili modelli cosmologici. La scoperta della radiazione di fondo cosmico (CMB) a circa $2,7^\circ K$ nel 1964 da parte di Penzias e Wilson, ha confermato l’omogeneità e l’isotropia, almeno su larga scala, dell’Universo. Il cosiddetto Principio Cosmologico, che afferma l’assoluta assenza di punti o direzioni privilegiate, è stato usato come principio guida per la messa a punto di modelli di universo ben prima della scoperta della CMB, addirittura a partire dagli anni ’20. Nel 1929, infine, la formulazione da parte di Hubble della famosa legge secondo cui le galassie si allontanano una dall’altra con una velocità direttamente proporzionale alla loro distanza, ha evidenziato l’espansione nel tempo dell’Universo, confermata dallo spostamento verso il rosso delle righe degli spettri di galassie distanti.

Il Principio Cosmologico di un Universo omogeneo ed isotropo, consente di immaginare una

²Per la precisione, si deve fissare la libertà di gauge imponendo vincoli opportuni. Nel caso specifico, si sceglie la cosiddetta gauge di “De Donder”, analoga alla gauge di Lorentz dell’elettromagnetismo (App. A.10)

situazione in cui, a tempo fissato, l'Universo stesso sia uno spazio tridimensionale molto particolare, l'analogo di una superficie sferica. In geometria Riemanniana, tali spazi vengono detti a curvatura costante. Per ricavare la metrica corretta nel caso quadridimensionale, conviene considerare l'analogia costituita dalla metrica di una superficie sferica (quindi bidimensionale) in tre dimensioni. Una sfera di raggio R , immersa nello spazio euclideo tridimensionale di metrica

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad , \quad (3.6)$$

ha equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad . \quad (3.7)$$

Imponendo, ad esempio, che x_3 sia legata alle altre coordinate dal vincolo (3.7) di appartenenza alla sfera e differenziando, si ottiene la metrica sulla superficie:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad . \quad (3.8)$$

Introducendo, per comodità, coordinate polari nel piano,

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad (3.9)$$

$$x_2 = r \sin(\theta) \quad (3.10)$$

e riscalando il raggio in unità di R , vale a dire $r \rightarrow r/R$, si può scrivere

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 \quad . \quad (3.11)$$

La metrica in eq. (3.11) costituisce il prototipo di metrica per uno spazio di curvatura costante positiva come la sfera. Se avessimo avuto un iperboloido (che può essere immaginato e visualizzato come una sella, in cui la curvatura in direzioni ortogonali sia opposta), la curvatura sarebbe stata costante ma negativa. Non è difficile convincersi che se si introduce un parametro k per la curvatura, la metrica

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 \quad , \quad (3.12)$$

descrive una sfera per $k = 1$, un iperboloido per $k = -1$ ed il piano per $k = 0$ (App. A.12). Per ottenere la metrica cosmologica, detta di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), è necessario introdurre il tempo come quarta coordinata. Allo scopo di tener conto dell'espansione, è anche necessario rendere il raggio r una funzione del tempo, sostituendo r con $a(t)r$, ove $a(t)$ è appunto il parametro di espansione. Scegliendo coordinate sferiche ed invertendo la segnatura della coordinata spaziale rispetto al tempo, si ricava

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \quad . \quad (3.13)$$

L'esistenza di tale metrica, dimostra indirettamente che utilizzando il Principio Cosmologico sia possibile scegliere un "tempo" universale, fissato il quale la parte spaziale dell'Universo appare come una varietà tridimensionale a curvatura costante. Nel caso della sfera, $a(t)$ è il raggio³,

³Per questo motivo a volte $a(t)$ viene indicato come il "raggio" dell'Universo

negli altri casi non ha un diretto significato geometrico ma si può comunque interpretare come il fattore di scala dell'Universo. Il sistema di coordinate in cui la metrica ha la forma FRW viene detto delle "coordinate comoventi". Assegnata la metrica, ed assimilato l'Universo ad un fluido perfetto⁴, la sola equazione indipendente che si ottiene è l'equazione di Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N \rho}{3} \quad , \quad (3.14)$$

ove il punto indica la derivata rispetto alla coordinata temporale. Introducendo il cosiddetto "parametro di Hubble"

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad , \quad (3.15)$$

che misura il "rate di espansione dell'Universo" ovvero la variazione del raggio nel tempo in unità del raggio stesso, e che vale al tempo attuale⁵ $H(t_0) \sim (72 \pm 8) \text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, l'equazione può essere riscritta nella forma

$$\frac{kc^2}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G_N \rho}{3H^2} - 1 \quad . \quad (3.16)$$

L'equazione di Friedmann dimostra che l'evoluzione dell'Universo dipende, non sorprendentemente, dalla quantità di materia. Infatti, definendo la densità critica $\rho_c = 3H^2/8\pi G_N$, ed introducendo il parametro $\Omega = \rho/\rho_c$, l'equazione assume la forma suggestiva

$$kc^2 = (\Omega - 1)H^2 a^2 \quad , \quad (3.17)$$

che evidenzia il legame tra la curvatura ed il rapporto della densità ρ alla densità critica ρ_c dell'Universo. Se infatti $\Omega > 1$, risulta $k = 1$. Lo spazio è a curvatura costante positiva ed è chiuso, vale a dire si espande e poi ricollassa su se stesso (big-crunch). Se $\Omega < 1$, ne consegue $k = -1$. Lo spazio è a curvatura costante negativa ed è aperto, ossia si espande indefinitamente. Ovviamente tale espansione tende, nel tempo, a divenire uniforme man mano che la materia tende a divenire più rarefatta. Infine, se la quantità di materia è esattamente quella critica, ovvero $\Omega = 1$, ne segue $k = 0$. Lo spazio è piatto e si espande indefinitamente in modo asintotico con una velocità che tende, senza mai raggiungerlo, a zero. Il valore attualmente misurato di Ω è molto vicino al valore critico. La materia barionica (ordinaria), invece, corrisponde ad una frazione della densità critica pari soltanto allo 0.04. Si può inoltre stimare da diverse analisi, ad esempio dallo studio delle curve di rotazione delle galassie, che circa una frazione pari allo 0.26 della densità critica deve essere presente sotto forma di materia oscura, di cui ancora non si conosce la natura. Il restante 0.70 costituisce una "dark energy" ancor più misteriosa. Quando Einstein formulò la Relatività Generale, si pensava che l'Universo fosse statico. Fu quindi accolta con sorpresa l'evidenza che il Principio Cosmologico conducesse a soluzioni (tipo FRW) che non possono essere statiche. Per ovviare a tale inconveniente, Einstein introdusse nelle sue equazioni di campo un termine aggiuntivo ottenendo

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.18)$$

⁴Per il lettore che volesse provare a ricavare le equazioni di Einstein nel caso di fluido perfetto, il tensore energia-impulso si può scegliere $T_{00} = \rho c^2$ e $T_{ij} = p\delta_{ij}$, dove ρ è la densità di energia e p la pressione del fluido.

⁵ Mpc sta per *megaparsec*, cioè milioni di *parsec*. Il *parsec* è una misura di distanza: $1 pc \sim 3 \times 10^{13} \text{Km} \sim 3.3$ anni - luce.

ove Λ è una costante (detta, appunto, Costante Cosmologica) che permette soluzioni corrispondenti ad Universi statici. La scoperta della legge di Hubble, spinse in seguito Einstein a considerare l'introduzione della Costante Cosmologica il suo “più grande errore” nella fisica. Tuttavia, l'interpretazione oggi più diffusa per la dark energy è esattamente quella di un termine di Costante Cosmologica, dovuto all'energia del vuoto della teoria “fondamentale” che dovrebbe descrivere la gravità nel regime quantistico.

Le equazioni di Friedmann e la legge di Hubble dimostrano che l'Universo è in espansione adiabatica, che il fattore di scala $a(t)$ cresce con il tempo e che la costante di Hubble decresce. Si può immaginare allora, in un viaggio a ritroso nel tempo, che l'Universo inizialmente occupasse uno spazio molto più piccolo di oggi, in cui la temperatura fosse molto elevata e la densità di materia molto più grande. Procedendo a ritroso, anzi, esiste un istante che dista un tempo finito nel passato, in cui la metrica diviene singolare, la curvatura dell'Universo diverge e con essa divergono la densità di materia e la temperatura. Ovviamente, non si conosce il significato fisico di tale singolarità. Si può solo sostenere che la descrizione in termini di Relatività Generale, in condizioni “estreme”, cessa di valere. Tuttavia resta plausibile lo scenario di un “Big-Bang caldo”, ovvero di un Universo primordiale che fosse un condensato di materia con temperatura e densità estremamente elevate, racchiuso in un volume estremamente piccolo. La “grande esplosione” da cui tutto ha avuto inizio⁶ ha fatto sì che l'Universo evolvesse espandendosi e nello stesso tempo raffreddandosi. Procedere a ritroso nel tempo, equivale quindi a studiare lo stato della materia a temperature e a scale di energia sempre più elevate. D'altra parte, osservare epoche remote è possibile osservando con telescopi regioni molto lontane. La luce che giunge fino a noi da una galassia distante 10 miliardi di anni-luce, ci consente di “vedere” com'era la galassia stessa dieci miliardi di anni prima. L'età dell'Universo è stimata tra i 12 e i 14 miliardi di anni circa⁷. Situando il Big-Bang al tempo zero, si può tentare di ripercorrere la storia dell'Universo. Essa, tuttavia, coinvolge inevitabilmente epoche in cui l'energia era così elevata da superare la scala elettrodebole. Per quelle epoche, non si dispone di una descrizione certa. Utilizzando qualche assunzione motivata dai modelli oggi ritenuti maggiormente plausibili (discussi nei prossimi capitoli), si può comunque tentare di distinguere le varie fasi in termini del tempo trascorso dopo il Big-Bang o della scala di energia media:

- $t \sim 10^{-44}$ s: corrisponde alla scala di Planck. È l'era della Gravità Quantistica. Non si può dire molto di questa epoca. Se l'idea di unificazione è corretta, dovrebbe esistere un unico tipo di interazione ed un'unica forma di materia.
- $t \sim 10^{-38}$ s: corrisponde ad una scala intorno a 10^{16} GeV; assumendo un modello di grande unificazione (Cap. 4), a questa scala dovrebbe avvenire la prima separazione tra il gruppo semplice ed il gruppo del MS $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Si separano le interazioni elettrodeboli e forti, e si formano i monopoli magnetici, molto numerosi. La violazione del numero barionico crea asimmetria tra barioni ed antibarioni (a condizione che anche \mathcal{CP} sia violata ed il sistema sia leggermente fuori dall'equilibrio).
- $t \sim 10^{-26}$ s: ad una scala intermedia nel settore nascosto avviene la rottura spontanea della supergravità.

⁶L'idea che l'Universo esista da un tempo finito ha disturbato generazioni di fisici. Molti sostengono che sia maggiormente plausibile l'idea di un Universo ciclico, in cui inizio e fine si susseguano eternamente.

⁷Il dato aggiornato al momento della scrittura è 13.73 ± 0.16 miliardi di anni, Spergel D.N. et al, ApJS 170(2007) 377.

- $t \sim 10^{-12}$ s: corrisponde alla scala del TeV, la scala tipica in cui dovrebbero separarsi le particelle supersimmetriche.
- $t \sim 10^{-10}$ s: la scala elettrodebole, $\sim 10^2$ GeV. Avviene la transizione elettrodebole ad una fase in cui $SU(2)_L \times U(1)_Y$ si rompe all' $U(1)_{em}$. La materia è un plasma di quark e leptoni che vengono continuamente creati ed annichilati dalle varie interazioni.
- $t \sim 10^{-6}$ s: corrisponde alla scala della QCD. I quark si legano a formare gli adroni, che gradualmente divengono non relativistici. Ha inizio quindi la cosiddetta nucleosintesi nel plasma primordiale di nucleoni e leptoni. I fotoni non hanno più energia sufficiente per creare coppie nucleone-antinucleone. A questo livello, deve esistere una asimmetria materia-antimateria barionica dell'ordine di $10^{-7} - 10^{-8}$, come testimoniato dalla stima del rapporto fra la densità fotonica e quella barionica.
- $t \sim 10^2$ s: circa 2-3 minuti dopo il Big-Bang, la nucleosintesi primordiale è completa. Essa prevede che le abbondanze relative, in massa, di nuclei di idrogeno rispetto ai nuclei di Elio sia di 3:1, in ottimo accordo con le osservazioni, ad esempio, di stelle molto vecchie.
- $t \sim 10^{11}$ s: L'Universo si espande con un andamento che varia nel tempo. Nelle fasi precedenti, la radiazione domina e produce una espansione in cui la dipendenza temporale del fattore di scala è $a(t) \sim t^{1/2}$. In questo epoca, detta "dell'equivalenza", si verifica la transizione ad un Universo la cui espansione è dominata dalla densità di materia, con un andamento della forma $a(t) \sim t^{2/3}$.
- $t \sim 10^{13}$ s: 300000 anni dopo il Big-Bang, la temperatura è scesa a circa 3×10^3 K, corrispondenti ad una energia dell'ordine $\sim eV$, tipica della ionizzazione degli atomi. In questo periodo vi è la separazione tra radiazione e materia. Gli elettroni sono catturati a formare gli atomi, ed i fotoni sono liberi di viaggiare nell'Universo, che diviene trasparente. Si osservi che prima di questa era, detta "della ricombinazione" o della "separazione", l'Universo è un plasma opaco. È impossibile "vedere più lontano" della "sfera celeste" corrispondente all'epoca della ricombinazione, che viene detta "superficie di ultimo scattering". I fotoni liberi, dopo un raffreddamento di un fattore circa 10^3 dovuto all'espansione adiabatica, giungono fino a noi sotto forma di CMB. La radiazione è, per così dire, l'immagine della superficie di ultimo scattering. Essa è una radiazione di corpo nero ad una temperatura di circa 2.7 gradi assoluti, ed è estremamente isotropa. Le anisotropie, necessarie per la formazione successiva delle strutture su larga scala (stelle, galassie, ecc.) sono state misurate nei recenti esperimenti (COBE, WMAP) e corrispondono a variazioni estremamente piccole, di una parte su 10^5 .
- $t \sim 10^{16}$ s: dalle anisotropie presenti al tempo della ricombinazione, il collasso gravitazionale produce la formazione delle strutture su larga scala: ammassi di galassie, galassie e stelle.
- $t \sim 10^{17}$ s: il tempo attuale. L'Universo sembra in transizione verso una nuova fase di espansione accelerata guidata da un termine, seppur molto piccolo, di Costante Cosmologica.

Lo scenario appena proposto, ovviamente molto schematico, contiene l'essenza del Modello Standard Cosmologico, condita con delle assunzioni derivate da generiche predizioni per scale

più grandi della scala elettrodebole, che saranno discusse nel Cap. 4. Molti i problemi ancora aperti, alcuni legati all'ignoranza relativa agli scenari "oltre il MS". Occorre sottolineare che alcune delle assunzioni generiche potrebbero rivelarsi completamente errate. Ad esempio, quelle connesse alla supersimmetria oppure la omessa presenza di extra-dimensioni grandi (previste da alcuni modelli di (super)stringhe), potrebbero cambiare drasticamente gli scenari descritti per tempi precedenti a $t \sim 10^{-10}$ s. Problemi emergono anche nell'ambito delle conoscenze in apparenza già acquisite del MS. Ad esempio, tra le particelle del MS non vi sono candidati per la materia oscura. Nuove particelle che potrebbero risolvere il problema, quali assioni e LSP (Lightest Supersymmetric Particle) verranno discussi nel Cap. 4. Il termine di Costante Cosmologica, inoltre, risulta incredibilmente piccolo rispetto alla scala naturale (M_{Planck}), e non trova spiegazioni plausibili, come visto, nella teoria microscopica.

Il Modello Standard Cosmologico contiene due predizioni fondamentali: 1) l'abbondanza dei nuclei leggeri (Idrogeno ed Elio) è in ottimo accordo con le osservazioni; 2) la CMB è predetta essere una radiazione di corpo nero. Tuttavia, nell'Universo di Friedmann, omogeneità ed isotropia, che conducono alla legge di Hubble, sono assunte più che predette. A ben guardare, infatti, omogeneità ed isotropia creano piuttosto dei problemi. Da un lato, la CMB è isotropa con una precisione impressionante. D'altro canto regioni del cielo che siano separate da angoli maggiori di 2 gradi erano, al tempo della ricombinazione, casualmente sconnesse. Ovvero, la loro distanza era maggiore del tragitto che la luce potesse aver percorso dal Big-Bang al tempo della ricombinazione. Ed è ben strano che regioni che non sono mai potute venire in contatto siano praticamente alla stessa temperatura (paradosso degli orizzonti). Inoltre, è molto sorprendente che il valore di Ω sia così vicino ad 1, vale a dire che la densità sia molto prossima alla densità critica e l'Universo sia essenzialmente piatto. Infatti, in un Universo che si espande e decelera, il valore di $(\Omega - 1)$ è legato all'inverso del quadrato della costante di Hubble, come emerge in eq. (3.17). Poichè la costante di Hubble decresce nel tempo, ne risulta che se oggi il valore misurato di Ω è molto vicino ad 1, al tempo della ricombinazione Ω doveva essere vicino ad 1 in modo assai più preciso di quanto non sia oggi, addirittura per una parte su 10^{16} .

La soluzione oggi universalmente accettata per il paradosso degli orizzonti e per la piatezza, nonché per la non presenza dei monopoli magnetici, va sotto il nome di paradigma dell'inflazione. Si immagina che ad una certa epoca l'Universo sia stato sottoposto ad una fase inflazionaria, in cui anzichè decelerare ha accelerato in modo enorme, ad esempio in modo esponenziale, grazie al dominio di un termine di Costante Cosmologica nelle equazioni di Friedmann. Durante il periodo di espansione, tutti i punti divengono causalmente connessi, in quanto l'orizzonte tende ad essere infinito e ad inglobare l'intero Universo. Quando l'inflazione cessa, punti che apparirebbero casualmente sconnessi nell'espansione decelerata in realtà sono stati in reciproco contatto. Inoltre, la fase accelerata schiaccia esattamente ad 1 il valore di Ω , qualsiasi fosse il valore precedente all'epoca inflazionaria, "risolvendo" il problema della piatezza. Anche il problema dei monopoli è risolto: l'inflazione deve essere legata alla forte instabilità dell'Universo nell'epoca delle transizioni di fase. Ad esempio, potrebbe essere guidata da un campo scalare che cada molto lentamente nel vero "vuoto". I monopoli formati in seguito alla transizione di fase, pur numerosi, verrebbero diluiti dall'enorme espansione dell'Universo. La loro densità residua diverrebbe così trascurabile.

L'inflazione fu introdotta da Guth nel 1981, migliorata prima da Linde e da Steinhard ed Albrecht (Nuova Inflazione) nel 1982, poi da molti altri autori in seguito. Oggi, ne esistono innumerevoli versioni ritagliate sui numerosi possibili scenari "oltre il MS" ed impossibili da discriminare in assenza di riscontri osservativi e sperimentali. Il paradigma dell'inflazione, in-

vece, appare fondamentale per rendere coerente la descrizione dell'Universo nei termini che emergono dal Modello Standard Cosmologico.

3.3 Gravità Quantistica?

Le equazioni di Einstein possono essere derivate come equazioni di Eulero-Lagrange (App. A.6) dall'azione di Einstein-Hilbert

$$S = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{|detg|} \mathcal{R}(x) + S_{mat} \quad , \quad (3.19)$$

ove la radice del determinante della metrica compensa lo Jacobiano rendendo la misura invariante per trasformazioni generali di coordinate. Il termine di azione è lo scalare di curvatura, che, come ricavato in precedenza, è un costrutto della metrica e della metrica inversa. Se sviluppato in serie in termini del campo gravitazionale, contiene potenze con esponente arbitrario. In altri termini, l'azione è non polinomiale e, come esaminato nel precedente paragrafo, dà luogo ad equazioni altamente non-lineari. Il termine di azione relativo ai campi di materia, S_{mat} , produce il contributo corrispondente al tensore energia-impulso.

La Relatività Generale descrive la gravità nel regime “classico”, in cui il campo gravitazionale è “debole”. Esistono tuttavia situazioni, come ad esempio i buchi neri, in cui un campo gravitazionale molto intenso rende la trattazione classica inadeguata e suggerisce la necessità di una versione quantistica della Relatività Generale. La quantizzazione della teoria deve passare attraverso l'individuazione della parte lineare delle equazioni, che, come di consueto, descrive la Lagrangiana “libera” (priva di interazioni) del campo gravitazionale. A tal scopo, l'azione viene sviluppata in serie ponendo

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu} \quad , \quad (3.20)$$

dove $h_{\mu\nu}$ è appunto interpretato come il campo del gravitone, mentre $k \sim \sqrt{G_N}$. La metrica \bar{g} è la metrica del “vuoto”, il riferimento intorno al quale vengono valutate le fluttuazioni, e di solito si assume essere la metrica di Minkowski. Tale scelta, ovviamente, in presenza di una Costante Cosmologica, non può risultare corretta. Il problema fondamentale del processo di quantizzazione per l'azione (3.19) risiede nel fatto che la corrispondente versione quantistica è una teoria non rinormalizzabile. Il motivo cruciale è insito nella dimensionalità della costante d'accoppiamento. Avendo G_N le dimensioni dell'inverso del quadrato di una massa (quindi k le dimensioni di una massa), la costante effettiva che pesa il vertice gravitazionale è essenzialmente E/M_P , ove M_P è la scala di Planck, $\sim 10^{19}$ GeV. L'interazione è estremamente debole a bassa energia, ma diviene sempre più forte al crescere dell'energia, fino a produrre infiniti non rinormalizzabili nell'ultravioletto. Come osservato nel Cap. 2, le teorie non rinormalizzabili hanno senso come teorie effettive o come teorie finite. Può accadere, infatti, che grazie ad un elevato grado di simmetria, i controtermini infiniti possano avere dei coefficienti che si sommano a zero. La teoria di Einstein priva di materia, ad esempio, è una teoria finita ad un loop, per il fatto che ad 1 loop tutti i possibili controtermini sono nulli. Tuttavia, come dimostrato da M. Goroff ed A. Sagnotti negli anni '80, essa diverge a 2 loop. La teoria con materia esibisce divergenze già ad un loop. Altri tentativi possibili per quantizzare la gravità usando teorie di campo riguardano le cosiddette supergravità (Cap. 4). Si tratta di teorie che classicamente generalizzano la Relatività Generale e in cui la supersimmetria, che lega bosoni

a fermioni, viene resa locale. Pur in assenza di calcoli espliciti, ci si attende che l'elevato grado di simmetria semplicemente rinvi le divergenze a comparire ad un numero elevato di loop.

Esistono degli altri approcci per quantizzare la gravità, basati su modelli e formalismi diversi, che non è il caso di rivedere in dettaglio in questa sede. Il lettore interessato è invitato a consultare [10]. Vale la pena di citare, tuttavia, le teorie di Kaluza-Klein, in cui la gravità in quattro dimensioni deriva dalla gravità in dimensione più alta. La proposta di T. Kaluza del 1921, poi ripresa da O. Klein nel 1925, venne formulata allo scopo di unificare la gravità all'elettromagnetismo, attraverso una gravità in cinque dimensioni (App. A.13). L'idea, molto semplice ma molto suggestiva, è la seguente: si immagina uno spazio-tempo di dimensione maggiore di quattro, in cui alcune delle "coordinate" siano piccole, compatte e arrotolate su se stesse. In tal modo, l'Universo appare quadridimensionale pur essendo multidimensionale, e le extra dimensioni danno luogo a torri di stati aggiuntivi la cui massa, dipendendo dall'inverso del volume delle dimensioni compatte, risulta molto grande. Per illustrare meglio il concetto, si consideri il caso di due coordinate, una infinitamente estesa e l'altra compatta, ad esempio identificabile con una circonferenza di raggio r . Lo spazio bidimensionale assume la geometria di un cilindro, ma è evidente che qualora il raggio r sia estremamente piccolo, diverrebbe difficile distinguere il cilindro da una retta, uno spazio con una dimensione in meno. Tutto, ovviamente, si gioca sul rapporto tra il raggio r della direzione compatta e l'energia dei processi che si vuole descrivere. Si riesce infatti a "risolvere" una dimensione piccola soltanto se si dispone di "luce" di una lunghezza d'onda ad essa comparabile o della corrispondente energia. Le "sonde" più potenti attualmente a disposizione, gli acceleratori di particelle, possono "penetrare" dimensioni che corrispondano ad energie dell'ordine della scala elettrodebole, $\sim 10^{-16}$ cm. Non si è in grado in alcun modo di distinguere dimensioni arrotolate con un raggio, ad esempio, pari alla lunghezza di Planck. L'idea di Kaluza-Klein verrà ripresa nel Cap. 5, ove giocherà un ruolo cruciale nell'ambito delle teorie di (super)stringhe. Le teorie di campo che descrivono la gravità, anche in dimensione elevata maggiore di quattro, soffrono degli stessi problemi di rinormalizzabilità delle teorie quadridimensionali. Inoltre, da una teoria di sola gravità è impossibile ottenere, usando la procedura di Kaluza-Klein, una teoria "chirale" in quattro dimensioni.

In prima istanza, anzichè quantizzare la gravità, si potrebbe pensare di poter incorporare la gravità sotto forma di "background", vale a dire studiare la teoria dei campi in un generico spazio-tempo curvo anzichè nello spazio di Minkowski. Anche tale approccio, tuttavia, è affetto da diversi problemi, il principale dei quali riguarda la definizione del vuoto. In presenza di gravità, infatti, occorre tener conto non solo delle fluttuazioni relative al vuoto ma anche dell'energia assoluta dello stato fondamentale, che ha rilevanza enorme, contribuendo assieme alle energie di punto zero dei campi, al termine di Costante Cosmologica. Problemi esistono anche nella definizione non ambigua del concetto di particella, indissolubilmente legata alle caratteristiche di massa e spin (a loro volte legate al gruppo di Poincarè), che non hanno evidenti ovvie generalizzazioni nel caso di uno spazio-tempo curvo generico.

Per concludere, vale la pena di illustrare un risultato molto spettacolare ottenuto da Hawking nell'ambito dell'approccio semiclassico, relativo al fatto che un buco nero, da cui classicamente nulla può uscire, in realtà, a causa delle fluttuazioni quantistiche, debba emettere radiazione sotto forma di particelle ed evaporare.

Anzitutto conviene ricordare cos'è un buco nero. L'esempio più semplice di buco nero è descritto da una soluzione delle equazioni di Einstein nota come soluzione di Schwarzschild, risalente al 1916. Si consideri una sorgente statica che generi un campo a simmetria sferica

omogeneo ed isotropo. Le equazioni di Einstein si riducono nel vuoto ad $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$. La soluzione si può scrivere nella forma seguente, in coordinate polari:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2) \quad . \quad (3.21)$$

Si osservi che la metrica di Schwarzschild in eq. (3.21) dipende soltanto dalla massa totale M della sorgente. Nel limite di campo debole, si riottiene il risultato Newtoniano. Infatti per $r \rightarrow \infty$, la componente g_{00} della metrica si riduce a $1 - 2V/c^2$, ove V è il potenziale newtoniano della forma

$$V(r) = \frac{MG_N}{r} \quad , \quad (3.22)$$

da cui è evidente il ruolo di massa giocato da M . Inoltre, se $M \rightarrow 0$, ovvero $r \rightarrow \infty$, la metrica (3.21) si riduce alla metrica di Minkowski (lo spazio è asintoticamente piatto). È importante osservare che le componenti della metrica (essendo la metrica statica) sono indipendenti dal tempo e singolari per $r \rightarrow 0$. Un ruolo preminente è giocato dal cosiddetto “raggio di Schwarzschild” $r_H = 2G_N M/c^2$. Se infatti $r > r_H$, la coordinata temporale è in effetti di “tipo tempo” ed r è di “tipo spazio”. Viceversa, se $r < r_H$, la coordinata t diviene di “tipo spazio” mentre la r è di “tipo tempo”. La superficie definita da $r = r_H$ è detta orizzonte degli eventi. Per $r = r_H$ la metrica appare di nuovo singolare, ma la singolarità non è fisica, è un artefatto del sistema di coordinate usato. Esistono altri sistemi di coordinate in cui la stessa metrica risulta non singolare. L’orizzonte degli eventi, d’altra parte, ha un significato fisico molto preciso. Non tutti gli oggetti massivi, infatti, ma soltanto quelli per i quali il raggio risulti più piccolo di r_H , si possono annoverare tra i buchi neri. Ciò accade per oggetti che hanno densità elevatissime. Il sole, ad esempio, per diventare un buco nero, dovrebbe collassare entro un raggio di circa $2,95 \text{ Km}$. Si pensa che i buchi neri siano presenti tipicamente al centro delle galassie, dove l’attrazione gravitazionale è abbastanza forte da consentire densità così elevate. L’enorme forza di gravità è tale che ogni cosa che entri nell’orizzonte degli eventi non ne possa più uscire, compresa la luce. Questo il motivo del termine “buco nero”. Si osservi dunque che un osservatore esterno può solo misurare la massa del buco nero (in casi più complicati anche la carica ed il momento angolare). Tuttavia la vera singolarità interna al buco nero, quella ad $r = 0$, è in un certo senso protetta dall’orizzonte degli eventi, che non consente di “guardare” dentro il buco nero medesimo.

Classicamente il buco nero è stabile. Tuttavia, esso possiede una temperatura ed una entropia. Un modo intuitivo per ricavare la temperatura è osservare che il tempo “euclideo” è legato al suo inverso. In tal modo è possibile associare al buco nero una temperatura pari

$$T_H = \frac{\hbar c}{4\pi r_H} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M} \quad . \quad (3.23)$$

D’altra parte, il rapporto tra la massa (energia) e la temperatura fornisce una stima dell’entropia. Nel caso del buco nero, dunque

$$S = \frac{Mc^2}{2T_H} = \frac{4\pi G_N M^2}{c\hbar} \quad . \quad (3.24)$$

L’entropia è quindi proporzionale all’area dell’orizzonte degli eventi, che, essendo una sfera, misura $A = 4\pi r_H^2$. A parte dei fattori numerici, che in questa derivazione puramente euristica

non sono esatti, si può affermare la validità della cosiddetta formula di Bekenstein-Hawking, secondo la quale l'entropia di un buco nero soddisfa la relazione

$$S = \frac{Ac^3}{4G_N\hbar} \quad , \quad (3.25)$$

($S = A/4$ in unità “naturali” in cui $\hbar = c = G_N = 1$), essendo proporzionale all'area dell'orizzonte degli eventi A . Come noto, l'entropia è anche legata alla degenerazione del numero di stati quantici del sistema. Per alcuni buchi neri molto particolari, il conteggio dei microstati è possibile in teorie di (super)stringhe, ove riproduce esattamente la legge di Bekenstein-Hawking. Infine, come oggetto quantistico, il buco nero non può essere stabile. Hawking infatti, immaginò che se, a causa dell'elevato campo gravitazionale, una coppia particella-antiparticella si forma in vicinanza dell'orizzonte di un buco nero, può accadere che la particella (o l'antiparticella) cada nel buco nero mentre la “partner” riesca a sfuggire. Per un osservatore esterno, ciò equivale all'emissione da parte del buco nero di una (anti)particella. Un buco nero diminuisce la propria massa ed evapora, emettendo particelle il cui spettro termico è la radiazione di corpo nero esattamente alla temperatura di Hawking T_H . L'evaporazione di un buco nero pone dei problemi concettuali non semplici ed ancora irrisolti, legati al fatto che la perdita di informazione relativa alle particelle che cadono nel buco nero non può in alcun modo essere recuperata e sembra inficiare l'unitarietà della Meccanica Quantistica, così come la diminuzione di entropia sembra contraddire il secondo principio della termodinamica. Tuttavia, il calcolo di Hawking è semiclassico, ed al solito si spera che la teoria quantistica completa della gravità possa aiutare a risolvere il paradosso.

Riassumendo, i tentativi di costruire una teoria quantistica della gravità in termini di teorie quantistiche dei campi sembrano fallimentari. L'unico approccio disponibile in grado di fornire risultati incoraggianti è la teoria delle (super)stringhe, che verrà analizzata nel Cap. 5. Il prezzo da pagare, ovviamente, sarà la rinuncia ad una descrizione dell'Universo in termini di entità elementari “puntiformi”, le particelle, a vantaggio di oggetti elementari estesi.

Capitolo 4

Oltre il Modello Standard

Come visto nel Capitolo 2, il MS non può ambire ad essere la teoria finale dell'unificazione di tutte le forze e le particelle. Tuttavia, trovare direzioni verso la “nuova fisica” non è semplice, da un lato perchè il MS è sorprendentemente in accordo con gli esperimenti. Dall'altro perchè la Relatività Generale è molto difficile da quantizzare e da armonizzare nel MS. Schematicamente, sono tre le vie che si possono seguire per andare “oltre” il MS. La prima consiste nell'aumentare la complessità della teoria, ossia pensare che alcuni dei costituenti del MS, ad esempio gli scalari, non siano elementari ma siano a loro volta composti. Questa possibilità verrà discussa nel paragrafo dedicato al “Technicolor”. Una seconda possibilità risiede nel mantenere i gradi di libertà fondamentali aumentando al tempo stesso la simmetria. Le Teorie di Grande Unificazione, eventualmente combinate con le Teorie Supersimmetriche, costituiscono i tentativi più promettenti in questa direzione. Saranno brevemente investigate anche le Teorie di Supergravità, ove la simmetria è allargata ad includere le trasformazioni generali di coordinate, e conseguentemente la gravità, in termini di supersimmetria locale.

Infine, la terza via esplora il tentativo di riformulare completamente la teoria in termini di nuove entità. Ad esempio, immaginare che i costituenti elementari non siano particelle bensì oggetti unidimensionali estesi, le (super)stringhe, conduce a scenari che possono riprodurre al loro interno il MS e, nello stesso tempo, incorporare una teoria quantistica della gravità. Le (super)stringhe verranno discusse nel capitolo finale del corso. In ogni caso, qualsiasi sia il tentativo ideato per investigare la nuova fisica “oltre in MS”, esso deve certamente misurarsi con i risultati sorprendenti forniti dai test di precisione di LEP. Genericamente, la nuova e “più fondamentale” teoria, di cui il MS dovrebbe risultare la teoria effettiva alla scala elettrodebole, deve praticamente coincidere col MS fino a quella scala o ne deve essere un' assai flebile variazione. Tra le estensioni del MS, quindi, sono favorite quelle che vi si discostano significativamente soltanto a scale molto alte.

4.1 Technicolor

Il settore di Higgs è certamente una pietra miliare del MS, ma è anche il settore meno “netto” e più dibattuto. In un certo senso, la bellezza delle teorie di gauge, riposta essenzialmente nel fatto che la forma dell'interazione sia dettata da un principio di simmetria, viene affievolita dal meccanismo di rottura spontanea, che introduce un numero elevato di interazioni “non geometriche”. L'idea del “Technicolor” (TC) nasce dalla volontà di evitare l'introduzione di scalari

elementari ad uso del meccanismo di rottura spontanea della simmetria elettrodebole. Essa ricalca la rottura dinamica della simmetria, già incontrata in QCD, . Allo scopo, si introduce una nuova interazione, detta “Technicolor”, simile al colore, ma tale che la scala Λ_{TC} , analoga della Λ_{QCD} , sia ora dell’ordine del TeV (10^{12} eV). Genericamente, il TC potrebbe essere basato su un gruppo $SU(N)$. L’analisi sarà invece confinata, per semplicità, ad un esempio con gruppo $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Occorre ovviamente introdurre nuovi fermioni che, contrariamente ai fermioni del MS, siano carichi rispetto a TC. Considerando un doppietto di Techniquark, ad esempio, U e D , si può immaginare che TC sia dinamicamente rotto da un loro condensato, in modo tale che il vev, ad esempio, soddisfi

$$\langle 0 | \bar{U}U | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{D}D | 0 \rangle = \Lambda_{TC}^3 \quad . \quad (4.1)$$

I bosoni di Goldstone della rottura, che riduce l’ $SU(2)_L \times SU(2)_R$ al sottogruppo $SU(2)$ diagonale, vengono “mangiati” dai corrispondenti bosoni W e Z che ottengono così una massa. In altri termini, i bosoni di Goldstone giocano lo stesso ruolo dei gradi di libertà longitudinali forniti dal campo di Higgs. Tuttavia, il settore “standard” non è affetto da TC, fatto che impedisce di introdurre una massa per i fermioni ordinari. Inoltre, è inevitabile in questo schema la presenza di processi del tipo FCNC (si veda il Par. 2.3), non osservati sperimentalmente. Per ovviare all’assenza di termini di massa, si può pensare di immergere TC in una simmetria più grande (detta “Extended Technicolor” (ETC)) che mescoli il settore delle nuove interazioni con quello del MS. In tal modo è possibile generare “dinamicamente” (cioè senza che i termini siano presenti nella teoria classica) dei termini di massa per i fermioni del MS.

L’idea della rottura dinamica della simmetria è certamente un’idea interessante ed anche assolutamente indipendente dalla presenza del settore di Higgs. I due schemi potrebbero ben convivere in una stessa teoria. Technicolor presenta degli ulteriori aspetti interessanti: il problema “CP forte”, ad esempio, vale a dire il “fine tuning” dell’angolo θ , sarebbe naturalmente risolto, così come le relazioni tra le masse dei bosoni determinate dal condensato, che possono essere sistemate in accordo con i dati sperimentali. Ovviamente, in assenza di scalari elementari, il problema della gerarchia sarebbe assente. Tuttavia, ETC cambia significativamente la struttura della teoria, fornendo purtroppo predizioni difficili da conciliare con i test di precisione del MS. Il settore di rottura spontanea, comprese le correzioni radiative, è stato sondato molto in dettaglio ed è in perfetto accordo con la struttura del meccanismo di Higgs. Si può ben dire che ETC, seppur non scartato, appare oggi certamente meno attraente del settore di Higgs.

4.2 Teorie di Grande Unificazione (GUT)

Alcuni aspetti che nel MS appaiono problematici od inspiegati, conducono naturalmente verso una sintesi in cui sia presente un grado maggiore di “simmetria”. Ad esempio, il MS non è una vera “teoria unificata” delle interazioni elettrodeboli e forti, ma solo una loro “sovrapposizione” che compendia 3 gruppi di gauge diversi, ciascuno con la propria costante d’accoppiamento, anziché un solo gruppo, magari “semplice” (App. A.2). Inoltre, la distribuzione dei numeri quantici e la ripetizione delle famiglie, così come l’elevato numero di parametri liberi del MS, sono aspetti totalmente misteriosi. Persino la quantizzazione della carica elettrica, il fatto che il rapporto tra la carica dell’elettrone e le cariche dei quark sia multiplo di tre e che le cariche delle altre particelle siano intere non è spiegato.

L'idea fondamentale alla base delle Teorie di Grande Unificazione, (GUT), è quella di introdurre una “vera unificazione”. H. Georgi e S.L. Glashow, nei primi anni ‘70, pensarono che il MS potesse derivare da una teoria in cui fosse presente un solo gruppo di gauge ed una sola costante d'accoppiamento. In altri termini, accantonando la gravità, che esistesse una sola forza ed una sola classe di particelle per le rimanenti interazioni.

Il gruppo del MS ammette quattro generatori diagonali, corrispondenti ai quattro numeri quantici simultaneamente misurabili dei tre gruppi in questione. Il gruppo della GUT deve dunque contenere almeno quattro generatori mutuamente commutanti. In altri termini, l'algebra del gruppo deve avere rango quattro, ovvero la sottoalgebra di Cartan dimensione quattro (App. A.2). I gruppi di rango quattro (semi)semplici si possono elencare: $SU(5)$, $SO(9)$, $Sp(8)$, $SO(8)$, F_4 , $SU(2)^{\otimes 4}$, $SU(3)^{\otimes 2}$, $SO(5)^{\otimes 2}$, $G_2^{\otimes 2}$. Fra questi, l'unico gruppo che contenga il gruppo del MS ed esibisca rappresentazioni chirali per $SU(3)$ ed $SU(2)$ è $SU(5)$. Il gruppo ha rango quattro, come detto, ma dimensione 24 ($SU(N)$ ha dimensione $N^2 - 1$), quindi è un gruppo a 24 generatori. La corrispondente teoria di gauge avrà conseguentemente ben 24 bosoni di gauge, 12 in più dei 12 del MS. Tali bosoni dovranno tutti essere massivi. Per capire quali siano i loro numeri quantici, occorre ovviamente studiare le rotture del gruppo $SU(5)$ al gruppo del MS e le corrispondenti regole di decomposizione. La **24** di $SU(5)$, l'aggiunta, contiene il gruppo del MS nelle seguenti rappresentazioni:

$$\begin{aligned} SU(5) &\rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \\ \mathbf{24} &\rightarrow (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{0}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \\ &+ (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{2}}, -\mathbf{5}/6) + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \mathbf{5}/6) \quad . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Non è difficile riconoscere nella prima riga dell'equazione (4.2) esattamente i numeri quantici dei bosoni vettori del MS, i gluoni nell'aggiunta (**8**) di $SU(3)$, i bosoni deboli nell'aggiunta (**3**) di $SU(2)$ ed infine il generatore dell'iperpercarica che, come si vede, ha carica $U(1)$ nulla. È fondamentale sottolineare che i generatori sono normalizzati secondo l'indice di Dynkin della rappresentazione, $I(R)$, in modo tale che $Tr[T^a T^b] = I(R)\delta^{ab}$. Per la fondamentale di $SU(N)$ la scelta canonica è $I(R) = 1/2$. L'immersione del gruppo del MS in $SU(5)$ è ovvia per le rappresentazioni fondamentali: la (**5**) di $SU(5)$ è la somma della (**3**) di $SU(3)$ e della (**2**) di $SU(2)$, in forma blocco-diagonale. La matrice relativa al generatore Y in tale rappresentazione non può che essere proporzionale a blocchi identità, con traccia nulla. Data la normalizzazione di $I(R)$, ne consegue un generatore dell'iperpercarica Y della forma

$$Y = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.3)$$

Ecco dunque un primo risultato interessante: il fatto che l'iperpercarica sia uno dei generatori di $SU(5)$ ha come conseguenza che l'iperpercarica (e dunque anche la carica elettrica) sia ora quantizzata! Restano da collocare entro $SU(5)$ i campi di materia. A tal scopo, è di nuovo necessario osservare le rotture delle rappresentazioni più piccole di $SU(5)$. Guardando ad esempio la **5** e la **10** si ottiene:

$$SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5} &\rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}/\mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1}/\mathbf{2}), \\
\mathbf{10} &\rightarrow (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\mathbf{2}/\mathbf{3}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}/\mathbf{6}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

Di nuovo, non è difficile riconoscere nella $\mathbf{5}$ (o meglio nella complessa coniugata $\bar{\mathbf{5}}$) i numeri quantici dei quark down destri, dell'elettrone e del neutrino elettronico, mentre la $\mathbf{10}$ può accomodare gli up sinistri e destri, i down sinistri ed infine il positrone. I quindici campi di una famiglia del MS trovano dunque collocazione entro il modello $SU(5)$ nella rappresentazione $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$, somma diretta di due rappresentazioni irriducibili. Uno stato della $\mathbf{5}$ corrisponde ad un vettore colonna a cinque componenti,

$$\Psi_L^i = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e \\ \nu_e \end{pmatrix} , \tag{4.5}$$

mentre un vettore nella $\mathbf{10}$, in termini di indici a cinque valori, è un tensore antisimmetrico, quindi una matrice antisimmetrica 5×5 , che si può scrivere

$$\Psi_L^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u_1^c & -d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u_2 & -d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^c \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^c & 0 \end{bmatrix} , \tag{4.6}$$

ove l'apice c è riferito allo spinore coniugato¹. Si osservi che, di nuovo, non si è in presenza di una vera e propria unificazione: le particelle di una stessa famiglia non sono tutte nello stesso vettore ma in uno che è la somma diretta di due vettori in rappresentazioni irriducibili.

Una volta fissato il gruppo e le rappresentazioni degli stati, le interazioni di gauge seguono automaticamente, come di consueto, rendendo locale la simmetria. Ovviamente la presenza di vettori di gauge aggiuntivi introduce nuove interazioni da essi mediate. Fra queste, pur restando $B - L$ un numero quantico conservato, i nuovi "leptoquark"² X_i e Y_i ($i = 1, 2, 3$), relativi alla seconda riga dell'eq. (4.2), producono inevitabilmente processi in cui il protone, ad esempio, può decadere in un mesone carico ed un antineutrino. Considerati i limiti sperimentali sul tempo di decadimento del protone, non è difficile stimare che tali bosoni intermedi dovrebbero avere una massa dell'ordine di $\sim 10^{16}$ GeV.

I generatori di $SU(2)$ ed $U(1)$, come detto, fanno ora parte del gruppo $SU(5)$. Introducendo il mixing tra i bosoni neutri del settore elettrodebole allo scopo di caratterizzare i campi relativi al W , allo Z ed al fotone, si ottengono relazioni tra la carica elettrica e e la carica debole g . In particolare, il loro rapporto fornisce l'angolo di Weinberg

$$\sin(\theta_W) = \frac{e}{g} = \sqrt{\frac{3}{8}} \quad . \tag{4.7}$$

Tale valore sarebbe un disastro, perchè sperimentalmente risulta $\sin^2(\theta_W) \sim 0.23$, molto diverso dallo 0.375 della predizione di eq. (4.7).

¹Conviene usare lo spinore coniugato sinistro in luogo dello spinore destro.

²Così detti perchè appunto mediano trasformazioni di quark in leptoni.

Lo scenario descritto, tuttavia, non tiene conto delle fluttuazioni quantistiche. L'intuizione geniale di Georgi, Quinn e Weinberg del 1974 fu quella di osservare che le relazioni classiche (quindi ad albero) di eq. (4.7), possono valere soltanto ad una scala in cui la simmetria sia ancora esatta. Le fluttuazioni "quantistiche", d'altra parte, fanno "correre" le costanti d'accoppiamento. Alla scala della rottura elettrodebole, ($\sim 100 \text{ GeV}$), le tre costanti g_S , g e g' (Par. 2.6), come visto, sono molto diverse. Al crescere dell'energia, valutando l'andamento attraverso le equazioni del gruppo di rinormalizzazione, g_S e g decrescono (in modo diverso) per via della libertà asintotica, mentre g' cresce. Si può allora ipotizzare che esista una "scala di grande unificazione" M_{GUT} , naturalmente dell'ordine della massa dei leptoquark ($\sim 10^{16} \text{ GeV}$) alla quale le tre costanti d'accoppiamento assumano lo stesso valore, da interpretare come il valore della costante d'accoppiamento di $SU(5)$, g_5 . Ovvero, ribaltando il punto di vista, ipotizzare che alla scala M_{GUT} vi sia una transizione di fase in cui il gruppo GUT sia spontaneamente rotto al gruppo del MS, ed al decrescere dell'energia vi sia la differenziazione dei valori delle tre costanti d'accoppiamento. Lo scenario sottende un'assunzione estremamente forte, la cosiddetta "ipotesi del deserto", secondo cui non vi dovrebbero essere ulteriori soglie di "nuova fisica" tra le due scale, distanti ben 13 ordini di grandezza. L'esperienza passata farebbe propendere verso l'ipotesi opposta, dato che ogni ordine di grandezza guadagnato ha sempre condotto a nuove scoperte, ma non si può escludere a priori che l'ipotesi del deserto sia possibile. In ogni caso, tre costanti forniscono tre diverse stime di M_{GUT} , e sarebbe "una miracolosa coincidenza" che i tre valori siano in perfetto accordo. Prima degli esperimenti di precisione di LEP al CERN, gli errori sulle costanti non consentivano di dirimere la questione, nel senso che le tre estrapolazioni erano compatibili con una scala $M_{GUT} \sim 10^{16}$. Assumendo l'unificazione, il valore di $\sin^2(\theta_W)$ alla scala elettrodebole risulta ~ 0.21 , assai vicino al valore sperimentale. Le misurazioni estremamente precise di LEP2 hanno in realtà dimostrato che le curve che estrapolano i valori del running delle costanti d'accoppiamento non si incontrano in un "punto", come riportato in figura 4.1. Fortunatamente, l'evoluzione può essere modificata dall'esistenza di nuove particelle. In particolare, se si introducono le cosiddette "particelle supersimmetriche" (ad esempio nel "Minimal Supersymmetric Standard Model", MSSM, discusso nei prossimi paragrafi) ad una soglia collocata intorno alla scala del TeV , le tre costanti d'accoppiamento possono evolvere in modo compatibile con l'unificazione, come illustrato di nuovo in figura 4.1. L'extrapolazione nell'ambito del MSSM può essere interpretata, a parere di chi scrive un po' "ad arte", come una indicazione indiretta dell'esistenza della supersimmetria.

Lo scenario della teoria $SU(5)$, comune a tutte le GUT, prevede diverse transizioni di fase a diverse scale, attraverso un uso ripetuto del meccanismo di Higgs. Nella prima transizione alla scala M_{GUT} , il multipletto di Higgs deve dare massa a ben 12 bosoni intermedi. Guardando le rappresentazioni di $SU(5)$, si può vedere che la scelta minimale è un campo di Higgs nella rappresentazione aggiunta, la **24**. Occorre dunque scegliere un valore nel vuoto del campo che sia "invariante" rispetto ai generatori del gruppo del MS immersi in $SU(5)$ e poi inventare un potenziale che sia minimo su quel vev. 12 dei 24 gradi di libertà sono "mangiati" dai leptoquark che assumono masse dell'ordine di M_{GUT} . Gli altri gradi di libertà corrispondono a campi che possono essere trascurati in quanto assumono masse dell'ordine di nuovo di M_{GUT} , e non si accoppiano ai fermioni. Per la rottura elettrodebole, inoltre, occorre introdurre un ulteriore multipletto di Higgs, ad esempio nella **5**, somma di un tripletto di $SU(3)$ e di un doppietto di $SU(2)$. Il doppietto è responsabile della consueta rottura elettrodebole. Il tripletto dell' $SU(3)$, invece, da luogo a 3 bosoni di Goldstone con masse alla scala elettrodebole. Per ovviare a tale discrepanza, occorre mescolare i due campi di Higgs introdotti, quello nella **5** e quello nella

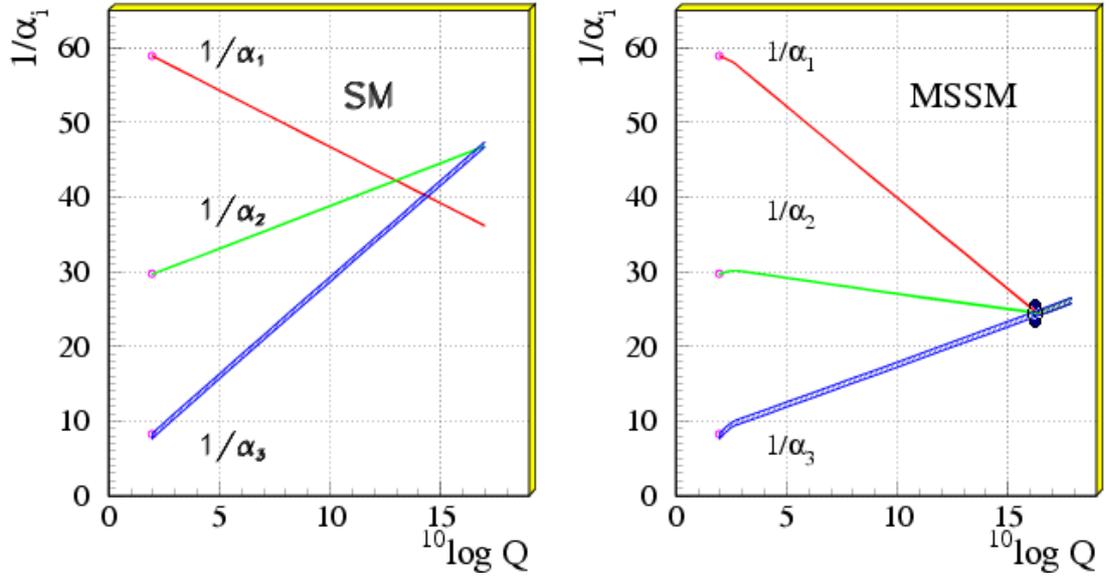


Figura 4.1: “Running” delle Costanti d’Accoppiamento nel MS e nel MSSM. Sono graficate le $\alpha_i = g_i^2/4\pi$, mentre $i = 1, 2, 3$ si riferisce rispettivamente all’ $U(1)_Y$, all’ $SU(2)_L$ ed all’ $SU(3)_c$.

24. Ci si trova quindi di fronte ad un ulteriore esempio di un problema generale già incontrato ed ubiquo in modelli con diverse scale di rottura: il problema della gerarchia. In una teoria con una gerarchia di scale, occorre scegliere opportunamente i parametri per mantenere le osservabili entro i valori sperimentali. Tuttavia, le fluttuazioni quantistiche, in special modo quelle degli scalari che, come visto, hanno una forte dipendenza dall’energia, tendono a guidare tutti i valori delle osservabili verso la scala più alta. Nulla di proibito o di errato. Ovviamente il problema è di “naturalzza”: non basta spiegare come due scale così diverse possano essere ottenute, occorre piuttosto stabilire come possano essere mantenute separate in presenza delle fluttuazioni quantistiche. Il compito è facilitato, come descritto in precedenza, se esiste una qualche simmetria che “protegga” la gerarchia.

Gli accoppiamenti di Yukawa nel modello $SU(5)$ sono ancor più vincolati di quelli del MS. Ne consegue, purtroppo, un panorama di relazioni fra le masse totalmente irrealistico (perchè essenzialmente leptoni e quark sono nello stesso multipletto) ovvero di nuovo la necessità di “aggiustamenti” assai innaturali. Vale la pena di osservare che i termini di massa “bare”, come nel MS, non sono gauge-invarianti, perchè il prodotto delle rappresentazioni dei fermioni con le coniugate non contiene singoletti. Le masse, al solito, si ottengono via gli accoppiamenti con l’Higgs. È positivo osservare che solo la **5** compare nei possibili termini, assicurando che i fermioni mantengano masse dell’ordine della scala elettrodebole.

Altri aspetti interessanti emergono dalla teoria $SU(5)$ appena discussa. La non conservazione del numero barionico, dovuta al mixing tra leptoni e quark, può essere usata per giustificare l’asimmetria materia-antimateria nell’Universo. Inoltre, la quantizzazione della carica elettrica innesca la possibilità che tali teorie prevedano la presenza di monopoli magnetici nell’Universo. In effetti, i monopoli si presentano come stati solitonici (Par. 2.5) di teorie di gauge non abeliane (se la teoria possiede uno spazio di vuoti topologicamente non banale), e

sono legati a soluzioni topologicamente stabili delle equazioni del moto. La carica magnetica q_m , in particolare, coincide essenzialmente con la carica topologica, e soddisfa la relazione di quantizzazione di Dirac

$$q_m q_e = 2 \pi n \quad , \quad (4.8)$$

dove n è un intero. Se esiste anche un solo monopolio nell'Universo, la carica elettrica risulta quantizzata. Come illustrato per gli istantoni, la massa dei monopoli è proporzionale ad M_{GUT}/q_e^2 . I monopoli sono dunque estremamente massivi nel regime “perturbativo” in cui la costante d'accoppiamento “elettrica” è piccola.

La presenza dei leptokvark conduce alla non conservazione del numero barionico in molte teorie GUT. Del resto, il numero barionico non è legato ad una simmetria di gauge come, ad esempio, la carica elettrica. Il tempo di vita media del protone dipende in modo indissolubile dalla scala M_{GUT} . Guardando i termini di Born (ad albero), si può dare una stima del tempo di decadimento del protone, che risulta

$$\tau_p \simeq \frac{M_{GUT}^4}{\alpha_5^2 m_p^5} \quad , \quad (4.9)$$

dove $\alpha_5 = g_5^2/4\pi$ e g_5 è la costante d'accoppiamento relativa al gruppo GUT. La misura del tempo di decadimento del protone fornisce una stima della scala M_{GUT} . Viceversa, la predizione per M_{GUT} conduce ad una predizione per τ_p . Al momento, i dati misurati sono compatibili con $\tau_p > 5 \cdot 10^{33}$ anni. Un valore così elevato di τ_p è incompatibile con le predizioni del modello $SU(5)$ di Georgi-Glashow.

Esistono ovviamente altre motivazioni che conducono ad esplorare modelli GUT diversi da $SU(5)$. Come nel MS, è fondamentale per la consistenza della teoria che le anomalie di gauge si cancellino. Ciò accade in $SU(5)$ in modo analogo al MS, vale a dire “accidentalmente”. Esistono gruppi la cui struttura di rappresentazioni rende le corrispondenti teorie di gauge automaticamente prive di anomalie. Un esempio in quattro dimensioni è dato dai gruppi ortogonali. Non esistono gruppi plausibili di rango 4, ma se si considera il gruppo $SO(10)$, esso ha tutti i requisiti necessari per includere il MS ed essere un “buon gruppo” per una GUT. Infatti, osservando il seguente “pattern” di rottura,

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1) \quad , \quad (4.10)$$

si può interpretare la cancellazione di anomalie nel MS ed in $SU(5)$ come “naturale” se pensata “discendere” in realtà dalla cancellazione entro $SO(10)$, gruppo automaticamente privo di anomalie. Inoltre, in $SO(10)$, le particelle di una famiglia del MS si possono collocare tutte in un'unica rappresentazione, la **16**, che contiene la $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ di $SU(5)$ ed un singoletto. Quest'ultimo riveste un ruolo particolarmente interessante, perchè può essere associato al “neutrino right”, particella “sterile”, ovvero priva di interazioni con tutte le altre. La presenza della componente “right” del neutrino consentirebbe di fornire una massa di Dirac al neutrino stesso, ed anche di spiegare perchè i neutrini del MS hanno una massa molto piccola. Naturalmente, infatti, la massa del neutrino dovrebbe essere almeno dell'ordine della scala elettrodebole, essendo legata al consueto vev del campo di Higgs. Tuttavia, la presenza del neutrino right complica la struttura dei termini di massa, che, come per il caso dei quark e dei leptoni, si raccolgono in una matrice le cui componenti sono contributi possibili ai diversi “tipi” di masse. Sarebbero certamente presenti un termine di massa di Dirac dell'ordine della scala elettrodebole, così

come un termine di massa di Majorana, inevitabilmente legato alla scala di rottura di $SO(10)$, M_{GUT} . La parte di Lagrangiana relativa alla massa del neutrino, se ci si limita per semplicità ad una sola generazione, può essere scritta nel modo seguente:

$$\mathcal{L}_\nu = (\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_L^c) \begin{pmatrix} 0 & m_D/2 \\ m_D/2 & M_{GUT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{pmatrix} . \quad (4.11)$$

È evidente che gli autostati della matrice (4.11) siano un neutrino (quasi) right con massa di Majorana prossima ad M_{GUT} ed un neutrino (quasi) left con una massa di Majorana dell'ordine di $m_D^2/4 M_{GUT}$. Se m_D è vicina alla scala elettrodebole, il neutrino leggero ha una massa compatibile con i risultati sperimentali che emergono dalle misure delle oscillazioni. Il meccanismo appena descritto, comune a tutte le GUT in cui è presente un neutrino right, viene detto "See-Saw".

Oltre ad $SO(10)$, è interessante la teoria basata sul gruppo E_6 , che estende $SO(10)$ e di conseguenza $SU(5)$. E_6 è l'unico gruppo eccezionale che ha rappresentazioni complesse e che contiene un sottogruppo $SU(3) \times U(1)$. Va detto, tuttavia, che all'aumentare del rango del gruppo, aumentano la complessità dei modelli, le dimensioni delle rappresentazioni e la complicazione dei pattern di rottura spontanea della simmetria, inevitabilmente legati ad una serie di transizioni di fase successive a scale diverse. La dimensione di E_6 è 78, il rango è 6 mentre la sua rappresentazione più piccola è la **27**.

Per riassumere, le GUT evidenziano molti aspetti interessanti e risolvono alcuni dei problemi presenti nel MS. Ad esempio, forniscono una vera teoria unificata, seppure l'unificazione si deve intendere ad una scala molto elevata, M_{GUT} ; preservano la struttura di gauge chirale del MS, prevedono la quantizzazione della carica elettrica e genericamente consentono la presenza del ν_R (e conseguentemente di una massa per il neutrino) e la violazione del numero barionico, requisito essenziale per poter spiegare l'asimmetria tra materia ed antimateria nell'Universo. Alcuni modelli prevedono anche il decadimento del protone e possibili processi con FCNC compatibili con i limiti sperimentali. Molti degli aspetti oscuri del MS, purtroppo, restano tali anche nelle GUT. Ad esempio, non vi è alcuna spiegazione dell'esistenza delle tre famiglie, dei valori delle masse delle particelle e dell'origine della rottura spontanea di simmetria. La struttura del settore di Higgs, inoltre, è sempre assai complicata, dato che i campi di Higgs coinvolti devono essere collocati in rappresentazioni di dimensioni elevate del gruppo di gauge. L'assunzione fondamentale dei modelli GUT è l'ipotesi del "deserto" tra la scala elettrodebole e la scala GUT. Un'ipotesi poco gradita perchè ritenuta poco credibile ed in conflitto con il problema della gerarchia: mantenere scale gerarchicamente distinte in presenza di scalari elementari richiede in genere aggiustamenti molto spinti o simmetrie aggiuntive che proteggano la gerarchia medesima. L'esistenza di campi di Higgs distinti che rompano spontaneamente la simmetria a scale diverse senza mescolarsi non è sostenibile in una teoria quantistica. Le GUT, concepite allo scopo di ridurre da tre ad uno il numero di costanti d'accoppiamento, in realtà esibiscono un numero di parametri liberi ancora maggiore del MS, a causa del complicato settore di Higgs ed alla presenza inevitabile di masse per i neutrini. Infine, le GUT non includono la gravità ed anzi prevedono genericamente l'esistenza (non osservata sperimentalmente) di un numero elevato di monopoli magnetici molto massivi nell'Universo.

4.3 Supersimmetria

Le simmetrie finora analizzate in assenza di gravità, siano esse globali o locali, continue o discrete, sono simmetrie che commutano con il gruppo di Poincarè ed in particolare con il sottogruppo delle rotazioni. In altri termini, sono simmetrie che non mescolano stati di spin diverso. Esiste un teorema, dovuto a Coleman e Mandula, che afferma che sotto assunzioni tecniche abbastanza naturali in una teoria quantistica dei campi³, le sole simmetrie della matrice S (la matrice di “scattering” o di diffusione, l’unica quantità che in teoria dei campi fornisce le ampiezze da cui si calcolano le quantità fisiche, ad esempio le sezioni d’urto) sono i generatori del gruppo di Poincarè ed un numero finito di generatori “interni” che devono appartenere all’algebra di un gruppo di Lie compatto, quindi del tipo analizzato nel MS. Il teorema di Coleman e Mandula si basa sull’assunzione ulteriore che i generatori debbano essere “bosonici”, vale a dire che l’algebra si chiuda utilizzando soltanto commutatori. Esiste tuttavia la possibilità ulteriore (che evade il teorema di Coleman e Mandula) di utilizzare generatori “fermionici”, ovvero includere nell’algebra anticommutatori. Gli ulteriori generatori dovranno portare essi stessi indici del gruppo delle rotazioni, ma fermionici anzichè bosonici. Dovranno, in altri termini, essere operatori di spin semi-intero. L’estensione di un’algebra di Lie ad includere generatori anticommutanti produce quella che si chiama un’algebra “graded” o “superalgebra”. Ed in realtà, il teorema di Haag, Lopuszanski e Sohnius (che generalizza quello di Coleman e Mandula) afferma che l’algebra di supersimmetria è l’unica estensione “graded” che sia compatibile con la teoria quantistica dei campi e con le simmetrie della matrice S .

La struttura di una superalgebra si può riassumere come segue. Indicati con B i generatori “bosonici” (pari) e con F i generatori “fermionici” (dispari), il “grading” rispetta essenzialmente la composizione delle rappresentazioni spinoriali, ovvero

$$[B, B] = B \quad , \quad (4.12)$$

$$\{F, F\} = B \quad , \quad (4.13)$$

con le parentesi graffe che indicano gli anticommutatori (App. A.4). Lo studio delle algebre di supersimmetria è un soggetto affascinante di per sé, ma oggi una cospicua porzione della comunità dei fisici teorici pensa e sostiene che la supersimmetria debba giocare un ruolo fondamentale soprattutto nella fisica delle alte energie. Emergerà nel resto del corso, infatti, che la supersimmetria consente di risolvere il problema della gerarchia e di migliorare alcuni aspetti delle GUT. Ad esempio, il “running” delle costanti d’accoppiamento, corretto con le soglie delle particelle supersimmetriche, risulta compatibile con l’unificazione dei loro valori in un “punto”, come già illustrato in figura 4.1. Inoltre, la supersimmetria fornisce candidati plausibili per la materia oscura. Infine, nella versione locale detta supergravità, descrive teorie classiche che unificano le interazioni di gauge con la gravità. Pur essendo inconsistenti come teorie quantistiche, le supergravità sono i limiti di “bassa energia” delle teorie di superstringhe, nelle quali la supersimmetria, come emergerà nel prossimo capitolo, gioca un ruolo fondamentale.

In teoria dei campi, la supersimmetria mescola campi di spin diverso. Le rappresentazioni di supersimmetria sono multipletti di campi in cui coesistono bosoni e fermioni. Per introdurre teorie con supersimmetria globale, o come spesso si dice “rigida” (in contrapposizione alla

³Le assunzioni riguardano la località della teoria, l’esistenza di un numero finito di campi e l’esistenza di un “gap” di energia fra vuoto e stati ad una particella.

supergravità), verranno indicati con Q^A i corrispondenti generatori. Le teorie con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria ammettono un solo generatore, quindi l'indice A assume un sol valore. In teorie con "supersimmetria estesa" l'indice A può assumere più valori. In quattro dimensioni spazio-temporali, le massime estensioni sono $\mathcal{N} = 4$ se si considerano teorie con campi fino a spin uno ed $\mathcal{N} = 8$ se si considerano teorie con campi fino a spin due. Teorie dei campi di spin maggiore di due sono assai difficili da formulare ed ancora, in gran parte, inesplorate. È ben noto, comunque, che per formulare teorie consistenti ed interagenti con campi di spin elevato si debba includere un numero infinito di campi. Da sottolineare che soltanto le teorie con $\mathcal{N} = 1$ ammettono rappresentazioni chirali, in quanto la presenza di più generatori connette necessariamente, nello stesso multipletto, partner fermionici di chiralità opposta.

Senza perdita di generalità, i generatori Q^A possono essere scelti come spinori di Weyl, ad esempio sinistri (e di conseguenza gli \bar{Q}^A , spinori coniugati, destri). Limitandosi ai soli generatori della supersimmetria, l'algebra si può scrivere

$$\begin{aligned} \{Q^A, \bar{Q}^B\} &= 2 (\sigma^\mu) P_\mu \delta^{AB} \quad , \\ \{Q^A, Q^B\} &= \epsilon Z^{AB} \quad , \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove σ^0 è la matrice identità, σ^i sono le matrici di Pauli, ϵ è il tensore completamente antisimmetrico negli indici spinoriali, e le Z^{AB} , dette cariche centrali, sono operatori scalari mutuamente commutanti e commutanti con i rimanenti generatori. La composizione di due supersimmetrie, come si può dedurre ispezionando (4.14), produce una traslazione, generata dal quadrimpulso P^μ . La supersimmetria è dunque una sorta di "radice quadrata" di una traslazione. È immediato osservare, inoltre, che i generatori Q^A commutano con P^μ ed in particolare con l'Hamiltoniana $H = P^0$. Ne consegue che stati di energia non nulla devono comparire insieme a partner supersimmetrici, in modo che il numero di gradi di libertà bosonici e fermionici massivi sia lo stesso. Inoltre dall'algebra si ricava immediatamente che

$$H = P^0 = \frac{1}{4} (\bar{Q}_1 Q_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_1 \bar{Q}_1 + Q_2 \bar{Q}_2) \quad . \quad (4.15)$$

Lo spettro di energia non può essere negativo, in quanto gli operatori che compaiono a secondo membro della (4.15) sono combinazioni semidefinite positive. L'energia del vuoto $|0\rangle$, è sempre ben definita, ed anzi se la supersimmetria non è spontaneamente rotta, ovvero

$$Q|0\rangle = 0 \quad , \quad (4.16)$$

allora

$$E_{vuoto} = \langle 0|H|0\rangle = 0 \quad , \quad (4.17)$$

ossia l'energia di vuoto è sempre nulla se la supersimmetria è esatta. Il vuoto con $E_{vuoto} = 0$ è anche un minimo del potenziale, diversamente da quel che accade in teorie di gauge, dove uno stato simmetrico non necessariamente risulta essere un minimo. Il viceversa è anche vero: se il vuoto è ad energia nulla, allora la supersimmetria è non rotta. Infatti, se la supersimmetria fosse rotta e dunque (4.16) violata, necessariamente $E_{vuoto} > 0$. Per riassumere: la supersimmetria è non rotta se e solo se il vuoto ha energia zero. Se invece la supersimmetria è spontaneamente rotta, vuol dire che il vuoto è degenero ed inoltre che $Q|0\rangle = |s\rangle \neq 0$. Tale stato fermionico $|s\rangle$, creato dall'azione di Q sul vuoto è l'analogo fermionico (a massa nulla) del bosone di Goldstone, e viene detto tradizionalmente goldstino.

Le rappresentazioni delle algebre di supersimmetria si possono studiare nella massima generalità. In questa sede, tuttavia, ci si limiterà ad alcuni esempi. Alcune proprietà importanti, come la positività dell'energia e l'ugual numero di gradi di libertà bosonici e fermionici, sono già state illustrate. Un' ulteriore importantissima proprietà, peraltro elementare, è la seguente: tutti gli stati di uno stesso multipletto relativo ad una rappresentazione irriducibile devono avere la stessa massa. Infatti l'operatore di massa è legato a $P^2 = P_\mu P^\mu$, che, come è facile verificare, è un Casimir quadratico dell'algebra di supersimmetria, commutando in particolare con le Q^A . Una conseguenza interessante è l'esistenza, in supersimmetria, di regole di somma per le masse. Ad esempio, se il vuoto è supersimmetrico, il contributo alla massa di ogni supermultipletto è identico per bosoni e fermioni data l'uguaglianza nel numero di gradi di libertà. In particolare, varrà la relazione

$$STr(M^2) = \sum_J (-1)^{2J} (2J+1) Tr(M_J^2) = 0 \quad , \quad (4.18)$$

proporzionale alla differenza fra il numero dei gradi di libertà fermionici e bosonici, se J indica lo spin delle particelle. Deve tuttavia sorprendere il fatto che tale regola di somma sopravviva non solo in presenza di supersimmetria esatta ma anche quando la supersimmetria è rotta spontaneamente. Si rammenti che solo campi scalari possono sviluppare dei valori di aspettazione nel vuoto senza rompere le simmetrie spazio-temporali. Nel caso delle teorie con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria, gli esempi più semplici di supermultipletti sono quelli legati alle rappresentazioni irriducibili di dimensione più bassa. Limitatamente al caso di massa nulla, è possibile ottenere:

- Il multipletto chirale $\Phi = \{\varphi, \psi\}$, che contiene un campo scalare complesso ed uno spinore di Weyl;
- Il multipletto vettoriale $V = \{A_\mu, \lambda\}$, che contiene un vettore ed uno spinore di Weyl, entrambi nell'aggiunta del gruppo di gauge.
- il multipletto gravitazionale $G = \{g_{\mu\nu}, \psi^\mu\}$, che contiene il gravitone di spin 2 ed una particella descritta da un campo spinoriale con un indice vettoriale, ovvero un campo di spin 3/2 o campo di Rarita-Schwinger, detto gravitino. Si vedrà in seguito che questo è il multipletto più semplice per una realizzazione lineare della supersimmetria locale (supergravità).

Nel caso $\mathcal{N} = 1$, nei multipletti compaiono coppie di campi il cui spin differisce di 1/2. Una singola carica di supersimmetria non può infatti che agire su un campo di spin s e produrre un campo di spin $s \pm 1/2$. Nel caso di supersimmetrie estese, la presenza di più cariche restituisce multipletti più complessi. Ad esempio, per $\mathcal{N} = 2$ l'azione su uno stato di spin 1 produrrà due stati di spin 1/2 e di conseguenza due stati di spin 0. Il multipletto vettoriale a massa nulla di $\mathcal{N} = 2$, è dunque costituito da $\{A^\mu, 2\lambda, 2\varphi\}$. La situazione è più complicata nel caso di multipletti massivi, ma una classificazione completa dei multipletti di supersimmetria va oltre gli scopi di questo corso. Vale solo la pena di accennare al caso della supersimmetria "massimamente estesa" che in 4 dimensioni, come detto, equivale ad $\mathcal{N} = 8$. In tal caso, agendo con le otto cariche sullo stato di spin 2, si ottengono 8 stati di spin 3/2, ($8 \times 7/2 = 28$) di spin 1, ($8 \times 7 \times 6 / (2 \times 3) = 56$) di spin 1/2 e ($8 \times 7 \times 6 \times 5 / (2 \times 3 \times 4) = 70$) stati di spin 0. Il multipletto risultante è quello della supergravità $\mathcal{N} = 8$ che, come risulterà chiaro nel prossimo paragrafo, ha un'origine geometrica molto profonda in 11 dimensioni.

Multipletto	Chiral			Vector		
Campi	φ	ψ	F	A_μ	λ	D
On Shell	2	2	0	2	2	0
Off Shell	2	4	2	3	4	1

Tabella 4.1: Gradi di libertà nei multipletti chirali e vettoriali $\mathcal{N} = 1$ in $d = 4$

Il vincolo di egual numero di stati fermionici e bosonici è molto importante per la formulazione delle teorie supersimmetriche. Come è possibile osservare in tabella 4.1, il multipletto chirale, ad esempio, contiene uno scalare complesso φ a massa nulla ed uno spinore di Weyl ψ . Un campo scalare complesso equivale a due gradi di libertà bosonici corrispondenti alle due componenti reali, mentre lo spinore di Weyl contiene in apparenza due componenti complesse, ovvero quattro gradi di libertà reali. L'equazione di Dirac (App. A.8) è lo strumento che consente di ridurre i gradi di libertà dello spinore. L'algebra di supersimmetria si chiude sul multipletto chirale soltanto se si utilizzano le equazioni del moto, ovvero se lo spinore è soluzione dell'equazione di Dirac. Per realizzare l'algebra senza utilizzare le equazioni del moto (come si dice "off-shell" anziché "on shell") occorre introdurre dei campi ausiliari che pareggino il numero di gradi di libertà. Per il multipletto chirale si introduce un campo ausiliario scalare complesso F , che fornisce i due gradi di libertà aggiuntivi. Lo stesso avviene nel multipletto vettoriale, dove il campo di gauge A_μ e lo spinore λ esibiscono due gradi di libertà "on shell", mentre "off shell" il vettore ne possiede tre (quattro meno uno dovuto al gauge fixing) e lo spinore addirittura quattro. La compensazione avviene attraverso l'introduzione di un campo scalare ausiliario reale D . Nel caso in cui il campo di gauge sia nell'aggiunta di un gruppo non abeliano, il campo D deve essere un multipletto di scalari nell'aggiunta. Si osservi che non sempre è possibile determinare i campi ausiliari che consentano la chiusura dell'algebra "off-shell", in special modo per teorie con supersimmetria estesa. I campi ausiliari sono "non fisici", nel senso che le loro equazioni del moto forniscono semplicemente dei vincoli lineari. Essi giocano tuttavia un ruolo fondamentale perchè determinano il potenziale degli scalari ed entrano nelle variazioni di supersimmetria dei campi.

La supersimmetria rigida non è una simmetria di gauge. Pertanto può essere rotta esplicitamente o spontaneamente. Per una rottura spontanea, come già osservato, l'energia del vuoto deve essere positiva e per preservare l'invarianza di Lorentz il campo che assume un vev non nullo deve essere un campo scalare. Nel caso $\mathcal{N} = 1$, le due condizioni sono soddisfatte qualora il vev sia assunto da uno dei campi ausiliari, il campo F o il campo D . In presenza di rottura spontanea della supersimmetria, come visto, compare nello spettro un goldstino e si spostano le masse degli scalari. In partenza, scalari e fermioni hanno stessa massa. Dopo la rottura spontanea, la degenerazione viene rimossa. Uno dei campi scalari acquista una massa più grande dei fermioni di una certa quantità m_0 , l'altro acquista una massa inferiore della stessa quantità. Il risultato netto è che la relazione di massa di eq. (4.18) resta valida anche in presenza di rottura spontanea della supersimmetria. Lo spettro, purtroppo, appare irrealistico: per ogni fermione dovrebbero esistere dei partner scalari di massa più piccola mai osservati. Ovviamente, le correzioni radiative possono cambiare la situazione, correggendo verso l'alto le masse degli scalari, ma ci si può convincere, ad una attenta analisi delle diverse possibilità, che sia assai complicato, se non impossibile, ottenere degli spettri realistici. Meccanismi più promettenti di rottura della supersimmetria saranno analizzati nel prossimo paragrafo nell'ambito della supersimmetria

locale.

Altra caratteristica fondamentale delle teorie supersimmetriche è la presenza nel potenziale delle cosiddette “direzioni piatte”. I campi assumono vev che corrispondono a minimi (locali) del potenziale. Nelle teorie supersimmetriche il potenziale spesso raggiunge il valore minimo lungo delle “direzioni”, delle linee, producendo una famiglia ad un parametro di possibili vev per il campo, come accade, ad esempio, quando esistono campi scalari con soli accoppiamenti derivativi e potenziale nullo. Ad ogni diverso valore del vev (detto “modulo”) corrisponde, per così dire, una diversa teoria. L’impossibilità di fissare il valore del modulo rende la teoria non predittiva. Talvolta le fluttuazioni quantistiche producono un potenziale effettivo che consente di eliminare la direzione piatta rimuovendo la degenerazione del minimo. Vale la pena sottolineare che anche nel meccanismo di Higgs (App. A.11) si ha in apparenza un continuo di vuoti, la valle dei minimi, ma in quel caso la scelta di uno di essi è completamente equivalente a tutte le altre, è analoga ad una scelta di “sistema di riferimento”. Viceversa, in presenza di un modulo, le scelte sono tutte inequivalenti e conducono a teorie in principio diverse. Lo spazio dei possibili valori dei parametri viene spesso indicato come “spazio dei moduli” della teoria corrispondente.

Le teorie supersimmetriche possono sembrare un esercizio teorico interessante e nulla più. In realtà, esse possono essere usate proficuamente per risolvere il problema della gerarchia. Il MS, infatti, funziona ottimamente fino alla scala elettrodebole, ma diviene assai innaturale in presenza di una nuova scala, sia essa la scala di Planck o la scala GUT. Come analizzato nel Par. (2.2), non vi è modo di mantenere una gerarchia di scale così spinta (13-15 ordini di grandezza) in una teoria quantistica in cui siano presenti scalari elementari. Le fluttuazioni quantistiche, quadratiche nel cutoff, spingono i parametri rapidamente verso le scale più alte, costringendo ad aggiustamenti estremamente precisi. Nelle teorie supersimmetriche, tuttavia, quando la simmetria è esatta, ogni scalare elementare è accompagnato dal suo “partner” supersimmetrico⁴. Ogni scalare beneficia dunque per la propria massa di una “protezione chirale” legata a quella del partner fermionico. Le correzioni alle masse dei fermioni contengono soltanto termini logaritmici, consentendo di mantenere la gerarchia di scale, dato che $\log(10^{15}) \sim 30$. Tale meravigliosa e miracolosa cancellazione dei termini quadraticamente divergenti si traduce nei famosi “teoremi di non rinormalizzazione”. L’essenza della cancellazione risiede nel fatto che i contributi ai loops da parte di campi anticommuntanti (i fermioni) è opposta a quella dei contributi dei campi commutanti (i bosoni). Più alto è il grado di supersimmetria posseduto da una teoria, più alto è il livello di controllo rispetto alle correzioni quantistiche. Ad esempio, nelle teorie con $\mathcal{N} = 1$ soltanto le funzioni d’onda dei campi vanno corrette, e di conseguenza le masse e le costanti d’accoppiamento non necessitano di ulteriori correzioni. La teoria di SYM con $\mathcal{N} = 4$, ad esempio, è una teoria come si suol dire “finita”: la funzione beta è nulla e dunque le correzioni radiative, se presenti, sono finite. Tale teoria è anche invariante rispetto alla combinazione della supersimmetria con una generalizzazione del gruppo di Poincarè nota come gruppo conforme. Si tratta del gruppo che, insieme a rotazioni, traslazioni e “boost” include anche le trasformazioni di scala. È il gruppo che conserva gli angoli fra vettori ma non le lunghezze. Una teoria in cui siano presenti particelle massive non rispetta l’invarianza di scala e non può essere invariante conforme. Inoltre, ogni regolarizzazione rompe l’invarianza di scala e

⁴Di solito il “partner” supersimmetrico si indica con una “s” iniziale (che sta per scalare) nel caso dei campi di materia. Ad esempio gli “squark” e “gli sleptoni” sono i partners di quark e leptoni. Viceversa, si usa “ino” al posto di “one” per i fermioni. Ad esempio, higgsino e gluino sono i partner fermionici del bosone di Higgs e del gluone

genera un'anomalia (detta anomalia di traccia, legata alla traccia del tensore energia-impulso). Per ottenere una teoria esattamente invariante conforme a livello quantistico occorre cancellare l'anomalia di traccia. Si vedrà nel Cap. (5) che le teorie di stringhe sono teorie invarianti conformi in due dimensioni.

4.4 Supergravità

Se la supersimmetria è una simmetria della natura, è probabile che essa sia “gauged”, vale a dire sia una simmetria locale. Nel caso delle teorie di gauge, il parametro della trasformazione è uno scalare e si accompagna ad un campo di gauge vettoriale di spin 1. Nel caso della supersimmetria, il parametro è uno spinore. Il campo di gauge diviene un campo di spin $3/2$, il gravitino. Come analizzato nel precedente paragrafo, il commutatore di due supersimmetrie rigide produce una traslazione. Il commutatore di due supersimmetrie “locali” produce una traslazione dipendente dal punto, ovvero una particolare trasformazione generale di coordinate. Appare dunque evidente che l'introduzione della supersimmetria locale comporti necessariamente l'introduzione della gravità. Motivo per cui le supersimmetrie locali vengono dette supergravità. A seconda del numero di supersimmetrie, si parla di supergravità “semplice” (se $\mathcal{N} = 1$) oppure di supergravità estese se $\mathcal{N} > 1$. La supergravità semplice si può realizzare utilizzando il multipletto di spin 2, che contiene soltanto il gravitone ed il gravitino. Sfortunatamente, non esiste un metodo generale per costruire una teoria di supergravità. I metodi utilizzati sono quelli iterativi, in cui si parte dai campi presenti nelle rappresentazioni di supersimmetria globale, e si aggiungono di volta in volta gli accoppiamenti che rendono locale la supersimmetria. Tipicamente, le supergravità sono teorie in cui i campi possono essere combinati in termini non-polinomiali nella Lagrangiana. È quindi estremamente difficile, in generale, determinare i completamenti della teoria di partenza. Una eccezione a questa regola si ottiene per le teorie con supergravità massimale, vale a dire che contengano il numero massimo di supersimmetrie consentite una volta fissata la dimensione dello spazio-tempo. Il motivo risiede nel fatto che le teorie massimali si possano ottenere dalla riduzione dimensionale (App. A.13) di teorie formulate in uno spazio-tempo di dimensione maggiore. Un esempio notevolissimo che vale la pena di citare, riguarda la supergravità $\mathcal{N} = 8$ in quattro dimensioni. In tale teoria, i campi scalari entrano in modo non-polinomiale. Non vi è dunque maniera di selezionarne gli accoppiamenti. Inoltre contiene 8 gravitini, per un totale di 32 gradi di libertà fermionici. Gli spinori si possono introdurre come rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz in ogni dimensione spazio-temporale. Il gruppo di Lorentz corrisponde, in dimensione d , al gruppo $SO(d-1, 1)$. Uno spinore di Dirac possiede un numero di componenti complesse pari a $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$, dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x . In dimensione d possono essere definiti anche spinori di Weyl (chirali), spinori di Majorana (reali), e spinori di Majorana-Weyl, simultaneamente reali e chirali, nel caso in cui risulti $d = 2 \pmod{8}$. Gli spinori di Weyl, invece, non esistono in dimensione dispari, ove è impossibile definire la chiralità. Ad esempio, uno spinore di Dirac in 10 dimensioni ha 32 componenti complesse, uno spinore di Weyl ne ha 32 reali, uno spinore di Majorana-Weyl ne ha 16 reali. Uno spinore di Majorana-Weyl “on shell” ha 8 componenti reali, le stesse di un vettore: in 10 dimensioni può allora esistere (ed esiste) un multipletto di supersimmetria contenente un vettore di gauge ed un gaugino. Un gravitone in d dimensioni ha invece $(d-2)(d-1)/2 - 1$ componenti, essendo i suoi gradi di libertà fisici descritti da una matrice $(d-2) \times (d-2)$ simmetrica e priva di traccia. In 10 dimensioni il gravitone equivale

ad una matrice con 44 componenti. Il gravitino, inoltre, può essere scelto di Majorana-Weyl. In realtà, le 8×8 componenti reali, descrivono i gradi di libertà di un gravitino fisico e della “gamma-traccia”, che è uno spinore di Majorana-Weyl con chiralità opposta. In 10 dimensioni, a differenza di quel che accade in $d = 4$, il campo coniugato di un fermione sinistro è ancora sinistro. Si possono introdurre dunque campi puramente “sinistri” o puramente “destri”. Per classificare le supersimmetrie, occorre specificare quanti gravitini sono puramente sinistri e quanti puramente destri. Il multipletto di supergravità $\mathcal{N} = (1, 0)$, ad esempio, contiene un campo spinoriale puramente sinistro, quindi un gravitino sinistro ed un fermione destro per un totale di 64 gradi di libertà fermionici “on shell”. Il multipletto è completato da un gravitone ($8 \times 9/2 - 1 = 44$ gradi di libertà), un tensore a due indici antisimmetrico ($8 \times 7/2 = 28$ gradi di libertà) ed uno scalare (dilatone, 1 grado di libertà) per un totale, di nuovo, di 64 gradi di libertà bosonici.

Assai interessante il caso della teoria che, esibendo supergravità semplice, abbia lo stesso numero di supercariche (ovvero stesso numero di componenti nei generatori di supersimmetria) della teoria $\mathcal{N} = 8$ in quattro dimensioni. Si tratta della meravigliosa supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 11$. La peculiarità di questa teoria risiede nella sua unicità (quando fu formulata, molti ritennero che potesse essere legata alla “teoria finale” e, come apparirà evidente nel prossimo capitolo, potrebbe essere così). In $d = 11$, il gravitone ha ($9 \times 10/2 - 1 = 44$) gradi di libertà. Il gravitino è un vettore ed inoltre uno spinore di Majorana. Possiede dunque, on shell, $((32 \times 9 - 32)/2 = 128)$ gradi di libertà. Per completare il multipletto, servono 84 gradi di libertà bosonici, che, come osservato da Nahm nel 1978, sono esattamente i gradi di libertà trasversi di una 3 forma A_{MNP} . Infatti un campo a tre indici A_{MNP} che sia totalmente antisimmetrico per scambio di una qualsiasi coppia degli indici stessi, esibisce esattamente $(9 \times 8 \times 7 / (2 \times 3) = 84)$ componenti indipendenti. Nello stesso anno la teoria del multipletto di supergravità 11-dimensionale, $G = \{g_{MN}, \psi_M, A_{MNP}\}$, fu costruita da E. Cremmer, B. Julia e J. Scherk. Si osservi che essa è unica in quanto non contiene campi scalari: tutti gli accoppiamenti sono fissati dalla supersimmetria locale. La riduzione dimensionale a $d = 4$ produce la supergravità $\mathcal{N} = 8$ comprensiva degli accoppiamenti molto complicati degli scalari, che emergono dalla geometria delle dimensioni interne, come sarà meglio discusso nell’ambito delle teorie di (super)stringhe.

Esistono due supergravità con 32 supercariche anche in $d = 10$. La cosiddetta tipo *IIa*, non chirale, è la teoria con $\mathcal{N} = (1, 1)$ che si ottiene “arrotolando” su un cerchio una delle dimensioni della supergravità $\mathcal{N} = 1$ 11-dimensionale. Il multipletto di supergravità *IIa*, oltre al gravitone ed ai due gravitini, contiene un vettore, una tre-forma, una due-forma, uno scalare e due fermioni. La tipo *IIb*, invece, la teoria $\mathcal{N} = (2, 0)$, contiene due gravitini di uguale chiralità, il gravitone, due scalari, due due-forme e due fermioni.

Tornando alla supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 4$, la prima ad essere scoperta nel 1976 da S. Ferrara, D.Z. Freedman e P. van Nieuwenhuizen, vale la pena di analizzare in che modo essa possa aver a che fare con la fisica delle particelle. È una teoria che ingloba naturalmente (una estensione de) la Relatività Generale. Tuttavia, come osservato nel Cap. (3), soffre del problema di essere non-rinormalizzabile⁵. La si può introdurre soltanto come teoria effettiva a scale inferiori al cut-off, collocato in modo naturale alla scala di Planck. Quale l’utilità di considerare una teoria che appare già in partenza non funzionare? Vi sono due ragioni fonda-

⁵Pur non essendo rinormalizzabili, le supergravità esibiscono notevoli proprietà ultraviolette. La sola Relatività Generale non presenta divergenze ad 1 loop. Ad esempio, la Supergravità $\mathcal{N} = 8$ si pensa sia finita fino a 7 loops, e forse anche oltre.

mentali. In primo luogo, le supergravità descrivono i gradi di libertà di “bassa” energia delle teorie di (super)stringhe. In secondo luogo, la supersimmetria locale può essere l’ingrediente fondamentale nel determinare la rottura della supersimmetria in maniera compatibile con la soluzione del problema della gerarchia. L’accoppiamento dei campi nei multipletti di supergravità ai campi dei multipletti di materia è argomento assai complesso, che può essere descritto solo in modo qualitativo. La supersimmetria locale, essendo una simmetria di gauge, può essere rotta soltanto spontaneamente. Il meccanismo all’opera è l’analogo supersimmetrico del meccanismo di Higgs (è noto infatti come “meccanismo di super-Higgs”). Essenzialmente, uno dei campi ausiliari della supergravità $\mathcal{N} = 1$ acquista un vev nel vuoto, ed il corrispondente partner supersimmetrico acquista il ruolo di goldstino. Tuttavia, nel caso di simmetria locale, esso viene “mangiato” dal campo di gauge, il gravitino, che acquista così una massa $m_{3/2}$. In supersimmetria rigida, come evidenziato nel paragrafo 4.3, la rottura spontanea equivale ad avere una energia di vuoto positiva. $E_{vuoto} = 0$ implica automaticamente supersimmetria esatta. In teorie di gravità, l’analisi dell’energia del vuoto è questione assai sottile, essendo legata al termine di Costante Cosmologica. Se E_{vuoto} è positiva, certamente la supergravità è rotta (non esistono quindi spazi di de Sitter supersimmetrici). La supergravità può essere esatta soltanto in spazi con E_{vuoto} negativa o nulla. Se, viceversa, la supergravità è rotta, l’energia del vuoto può essere di qualsiasi segno. In particolare, esiste la possibilità di una teoria in cui la supergravità sia rotta ma la Costante Cosmologica sia nulla. Questione interessante è quella che riguarda la massa del gravitino. Infatti se M_S è la scala di rottura della supergravità, la massa del gravitino è dell’ordine di M_S^2/M_{Planck} (strettamente parlando, questo è vero solo se la Costante Cosmologica è nulla). Con una scala di rottura dell’ordine di $10^{10} GeV$, quindi, è facile ottenere per $m_{3/2}$ un valore vicino alla scala elettrodebole, diciamo $\sim 1 TeV$. Una ulteriore sorpresa nelle teorie di supergravità riguarda le relazioni di massa, che non appaiono più così vincolate come nella teoria rigida. Tipicamente, i bosoni risultano avere masse più alte dei corrispondenti fermioni, tutte a scale dettate da $m_{3/2}$. Si prospetta dunque uno scenario assai affascinante: la rottura della supersimmetria potrebbe avvenire spontaneamente nel settore della supergravità ad una scala “intermedia” (dell’ordine $\sim 10^{10} GeV$) producendo, a scale più basse, masse per le particelle dell’ordine della massa del gravitino, ovvero dell’ordine della scala elettrodebole. Il risultato è la generazione a bassa energia (a scala del TeV) di termini effettivi che rompono esplicitamente la supersimmetria rigida ma che risultano, come si suol dire, soffici: non vi è alcuna dipendenza quadratica dal cut-off ma solo dipendenza logaritmica. Inoltre, sotto opportune condizioni, le correzioni radiative possono anche “guidare” la rottura elettrodebole via dei termini opportuni di potenziale per gli scalari. Ovviamente, perchè tutto questo avvenga, deve esistere un settore di supergravità “nascosto”, che sia solo debolmente accoppiato con il settore visibile. Tale assunzione è alla base delle moderne versioni del cosiddetto “Modello Standard Supersimmetrico Minimale” (MSSM).

4.5 Estensioni Supersimmetriche: Il MSSM

Il problema della gerarchia di scale nelle estensioni del MS, accennato nei paragrafi precedenti, pur non minando la consistenza della teoria, appare tuttavia un aspetto destabilizzante: un “fine tuning” di molti ordini di grandezza sembra assai innaturale, al punto da rovinare la “bellezza” di un modello rendendolo assai meno attraente. È difficile credere che la realtà possa essere matematizzabile e nello stesso tempo apparire così innaturalmente goffa. A meno

che non esistano principi nuovi e profondi che ancora si ignorano. Inoltre, gli esperimenti di precisione di LEP non lasciano molta libertà riguardo le possibili strade che possano condurre al superamento del MS. La risposta naturale, in questa direzione, sembra essere una estensione supersimmetrica del MS che, con opportuni accorgimenti, possa da un lato modificare “poco” il MS stesso, dall’altro risolvere in modo definitivo il problema della gerarchia. Il paradigma attualmente più popolare e dunque più largamente condiviso va sotto il nome di Modello Standard Minimale Supersimmetrico.

È assai semplice concepire una estensione supersimmetrica del MS. A tal scopo, ad ogni campo di gauge si fa corrispondere un multipletto vettoriale con annesso fermione, ad ogni campo fermionico un multipletto chirale con annesso bosone, in modo tale che compaia un ugual numero di campi bosonici e fermionici. Da osservare che i fermioni potrebbero in principio essere inseriti in multipletti vettoriali, ma allora esisterebbero ulteriori campi di gauge, con un inaccettabile allargamento del gruppo del MS e con fermioni non chirali nella rappresentazione aggiunta dei gruppi. Occorre dunque introdurre ben 12 multipletti vettoriali e 45 multipletti chirali, con un’enorme proliferazione di “particelle” elementari nello spettro. La teoria risultante dovrà anche essere priva di anomalie, proprietà che influenza necessariamente il settore di Higgs. Un solo multipletto chirale produrrebbe immediatamente un’anomalia legata al partner dell’Higgs, l’higgsino. È necessario introdurre un ulteriore multipletto chirale di Higgs, che da un lato consenta la cancellazione delle anomalie, dall’altro sia in grado di fornire accoppiamenti di Yukawa per le masse delle componenti alte dei multipletti, ad esempio del quark up. La proliferazione dei campi, ovviamente, si traduce in un’analogia proliferazione degli accoppiamenti e dei parametri. Ad esempio, è assai semplice ottenere degli accoppiamenti che violino B ed L e conducano ad un decadimento molto rapido del protone. Onde evitare simili inaccettabili predizioni, la soluzione più semplice, come al solito, consiste nell’introdurre una ulteriore simmetria, questa volta discreta, nota come R -parità. Le particelle ordinarie vengono assunte pari rispetto all’ R -parità, mentre i partners supersimmetrici dispari. L’introduzione di tale simmetria discreta, oltre ad eliminare gli accoppiamenti “non voluti” e “pericolosi”, impone che le particelle supersimmetriche, introdotte in aggiunta a quelle del MS (esclusi i multipletti chirali degli Higgs) possano essere prodotte soltanto rispettando la R -parità. Di conseguenza, la particella più leggera fra le nuove introdotte, essendo dispari e non potendo decadere in coppia pari-dispari, è perfettamente stabile. Tale particella (la LSP, “lightest supersymmetric particle”) diviene un candidato naturale di materia oscura: interagisce molto debolmente, ed assumendo che la scala di rottura della supersimmetria sia dell’ordine del TeV (come necessario per la soluzione del problema della gerarchia), si può calcolare che il suo apporto alla densità di materia coincida (rozzamente) con quello necessario a colmare il deficit descritto nell’ambito del Modello Standard Cosmologico.

Il problema fondamentale, nel MSSM così come nel MS, è la comprensione della dinamica, ovvero dei meccanismi che spieghino la rottura delle simmetrie non manifeste in natura. La supersimmetria, ovviamente, deve essere rotta, almeno alle energie che si è stati in grado di esaminare fino ad oggi. Non vi è traccia, infatti, di partner supersimmetrici delle particelle del MS. Se esistono, essi devono avere masse assai più alte di quelle delle corrispondenti particelle. Non vi sono modi ovvi per predire la differenza di massa tra particelle note ed eventuali partners. Se tuttavia la scala di rottura della supersimmetria fosse effettivamente dell’ordine del TeV, segnali di particelle supersimmetriche potrebbero essere osservati nell’immediato futuro al collisore LHC del CERN.

Nei precedenti paragrafi è stato dimostrato come i meccanismi di rottura spontanea della

supersimmetria conducano inevitabilmente a valori non realistici per le masse. Ad esempio, se esistesse veramente un partner scalare dell'elettrone con massa più piccola, esso sarebbe stato certamente osservato da molto tempo. L'alternativa è che la supersimmetria sia rotta esplicitamente, quindi, in qualche modo, NON sia una simmetria dell'Universo ma solo delle sue manifestazioni di "bassa" energia. Tuttavia, per mantenere la motivazione all'origine dell'introduzione della supersimmetria, vale a dire la soluzione del problema della gerarchia, i termini di rottura esplicita non possono essere completamente arbitrari, devono essere tali da non contenere le famose dipendenze quadratiche dal cut-off. Tali termini vengono detti "termini soffici", proprio perchè le loro correzioni quantistiche continuano a dipendere debolmente dal cut-off (sia esso la scala GUT o la scala di Planck). I termini soffici sono termini di massa per i gaugini, termini di massa e termini di Yukawa ("A-terms") per squark e sleptoni, masse e termini di mixing per i campi di Higgs. I termini soffici parametrizzano l'ignoranza relativa alla fenomenologia alla scala del cut-off o comunque a scale più alte della scala di rottura della supersimmetria rigida ($\sim TeV$), che ne fornisce di conseguenza l'ordine di grandezza. Di nuovo, così come nel MS, la rottura della simmetria produce una proliferazione dei parametri liberi, che ovviamente rende meno attraente e meno predittivo il Modello: accanto alle matrici 3×3 soft di squark e sleptoni (45 parametri), si devono aggiungere le masse di due Higgs, le tre masse per i gaugini, sei matrici 3×3 di Yukawa ed infine un parametro reale dal μ -termine (vedere dopo), per un totale di ben 105 parametri solo nel settore soffice.

La presenza dei termini soffici, inoltre, è necessaria per guidare rottura della simmetria elettrodebole. Il potenziale di Higgs, infatti, nella parte supersimmetrica contiene il cosiddetto μ -termine, un accoppiamento che mescola i due multipletti chirali di Higgs. Ad albero, il termine di massa degli Higgs supersimmetrici è genericamente della forma

$$m_H^2 = |\mu|^2 + M_H^2 \quad , \quad (4.19)$$

dove al μ termine si aggiunge il termine soffice M_H . Il μ -termine è ovviamente sempre positivo, e da solo non potrebbe innescare la rottura spontanea della simmetria elettrodebole. D'altra parte, con l'aggiunta del termine soffice si può generare un termine quadratico negativo. Naturalmente, il μ -termine non ha protezione chirale e tende ad essere dell'ordine del cut-off, mentre la rottura della simmetria elettrodebole presupporrebbe che il termine quadratico complessivo sia dell'ordine del vev dell'Higgs del MS. Ecco che il problema della gerarchia si ripresenta nella forma di "problema μ ". La soluzione cui si fa ricorso in molti modelli è l'assunzione di un μ -termine nullo in partenza, che venga generato soltanto in seguito alla rottura della supersimmetria, in modo da restare dello stesso ordine di grandezza dei termini soffici.

Nel MSSM sono presenti 8 gradi di libertà reali di Higgs. Di essi, tre sono "mangiati" dalla rottura elettrodebole e cinque (scalari), due neutri e tre carichi, restano nello spettro. I termini di massa per gli scalari carichi possono essere arbitrariamente alti, mentre i due Higgs neutri devono essere relativamente leggeri. Anzi, sempre ad albero, la massa dell'Higgs più leggero (di solito indicato con h_0), si trova ad essere più piccola di m_Z . Se così fosse, h_0 sarebbe già stato scoperto a LEP. Le correzioni radiative consentono di alzare il valore della massa, che tuttavia, almeno nell'ipotesi che le masse delle particelle supersimmetriche non eccedano il TeV, deve risultare $m_{h_0} \leq 150 GeV$, perfettamente all'interno dell'intervallo di valori che saranno ispezionati ad LHC.

L'introduzione dei numerosi termini soffici rende molto complesso il controllo dello spazio dei parametri, limitando la predittività del MSSM, anche se i vincoli derivanti dal MS possono aiutare ad eliminare qualche libertà. Ad esempio, potrebbe accadere che la base degli autostati

delle masse degli “sleptoni” sia diversa da quella degli autostati delle masse dei leptoni. Ma se questo accadesse, si dovrebbero osservare violazioni del numero leptonico. Inoltre, come accennato in precedenza e come riportato in figura 4.1, il running delle costanti di accoppiamento indica una perfetta unificazione ad una scala di $\sim 10^{16} GeV$. È naturale postulare che il MSSM sia una teoria effettiva derivante da una teoria GUT supersimmetrica alla scala di unificazione o alla scala di Planck, e che i termini soffici siano quel che sopravvive a bassa energia della rottura della supersimmetria ad una scala intermedia. Lo scenario, qualitativamente, può essere riassunto come segue: ad una scala molto elevata, la scala di Planck o la scala GUT, esiste una teoria fondamentale, per ora non nota, che auspicabilmente potrebbe essere la teoria di (super)stringhe o il suo completamento, la teoria “M” (discussa nel prossimo Capitolo). È inoltre necessario supporre che vi siano due settori, uno visibile ed uno, per così dire, nascosto. I due settori interagiscono fra loro molto debolmente. La descrizione delle interazioni al diminuire della scala può essere letta come una sorta di evoluzione della materia nell’Universo Primordiale a partire dall’era della gravità quantistica fino all’era della separazione radiazione-materia. Al diminuire della scala, infatti, hanno luogo diverse transizioni di fase. La prima avviene alla scala GUT o alla scala di Planck, e corrisponde alla rottura del gruppo di gauge al gruppo del MS, pur continuando la teoria ad essere supersimmetrica. Ad una scala intermedia, dell’ordine $\sim 10^{10} GeV$, ha luogo, nel settore nascosto, una nuova transizione di fase, in cui la supergravità si rompe spontaneamente, producendo, oltre alla massa del gravitino quei termini “soffici” che sopravvivono fino alla scala elettrodebole. Alla scala del TeV , la teoria effettiva è dunque il MSSM comprensivo dei termini soffici che producono scale di massa relativamente basse per le particelle supersimmetriche, consentendo contemporaneamente di mantenere la gerarchia di scale. Infine, i termini soffici “guidano” opportunamente, grazie alle correzioni radiative, la rottura spontanea della simmetria elettrodebole dando luogo finalmente al MS delle interazioni elettrodeboli e forti.

Lo scenario appena descritto, pur verosimile, va inteso come un paradigma: è difficile produrre modelli espliciti che possano descriverne i dettagli, perchè ovviamente le assunzioni da controllare sono numerose ed a diversi livelli. Ad esempio, vi sono svariate possibilità relative al settore “nascosto” ed al modo in cui tale settore trasmetta la rottura della supersimmetria locale al settore visibile. Il meccanismo di super-Higgs fornisce, in effetti, la base per la produzione dei termini soffici. Essi, tuttavia, potrebbero derivare da una rottura perturbativa oppure, ad esempio, da una rottura dinamica della supergravità attraverso la condensazione del gaugino, analoga alla condensazione dei quark in QCD (descritta nel Par. (2.4)), oppure ugualmente da multipletti chirali aggiuntivi nel settore nascosto. Il Modello più popolare, detto “MSUGRA (Minimal Supergravity) model”, assume che i termini soffici siano trasmessi al settore visibile da interazioni gravitazionali via la massa del gravitino, e che i parametri indipendenti del settore soffice siano soltanto cinque alla scala più alta. I parametri del MSSM e del MS si ottengono allora attraverso il “running” delle costanti d’accoppiamento, dando luogo a modelli con rottura della supersimmetria attraverso mediazione gravitazionale (detti “gravity-mediated”). Esistono anche versioni in cui il “messaggero” della rottura della supersimmetria sia invece un campo di gauge (“gauge mediated”). Nel prossimo Capitolo, verranno illustrati ulteriori scenari alternativi, in cui la rottura della supersimmetria sia guidata da meccanismi legati alle anomalie (“anomaly mediated”) oppure dalla presenza di dimensioni estese extra (“extra-mediated”).

Capitolo 5

Le (Super)Stringhe

Come spesso accade nella scienza e più in generale nella ricerca, la storia delle Teorie di (Super)stringhe si è sviluppata in modo assai peculiare. Alla fine degli anni '60, infatti, nello studio delle interazioni forti tra particelle elementari, vennero scoperte numerose risonanze adroniche¹, che esibivano alcune proprietà interessanti. In particolare, graficando in ascissa la massa quadrata delle particelle ed in ordinata lo spin, si poteva osservare che le risonanze si dispongono su rette, le cosiddette “traiettorie di Regge lineari”. Risonanze di spin J sono difficili da descrivere nell'ambito della teoria quantistica dei campi. Se ci si limita alle ampiezze “ad albero”, ad esempio, i grafici di Feynman corrispondenti crescono con l'impulso seguendo una legge a potenza di esponente J . Un andamento che conduce immediatamente alla violazione di requisiti fondamentali quali il “limite di unitarietà” della matrice di scattering, la proprietà che consente di conservare la densità di probabilità quantistica.

Nel 1968, il fisico teorico italiano G. Veneziano ebbe un'idea geniale: considerare la possibilità di un insieme infinito di risonanze. Il limite di unitarietà, infatti, è senz'altro violato se le risonanze sono in numero finito. Tuttavia, in presenza di infinite risonanze, potrebbe accadere che la somma di tutti i termini abbia un andamento “migliore” di quello dei singoli addendi, nello specifico un comportamento più soffice nell'ultravioletto. Veneziano fu in grado di scrivere un'ampiezza per la descrizione della diffusione di quattro risonanze, nota appunto come “Ampiezza di Veneziano”, che gode esattamente della proprietà desiderata: l'andamento per grandi valori dell'impulso, anziché divergere, decresce esponenzialmente. L'ampiezza di Veneziano esibisce un'ulteriore proprietà, detta dualità planare: si comporta come se le quattro risonanze siano vincolate a giacere sul bordo di un disco.

L'analisi di Veneziano fu ben presto compresa e generalizzata ad altri “Modelli Duali”. Venne dimostrato che le infinite risonanze potevano essere associate ai “modi di vibrazione” di oggetti unidimensionali, stringhe con estremi liberi (stringhe aperte), e che l'ampiezza di Veneziano altro non è che l'ampiezza di diffusione di quattro stringhe aperte, descritta in maniera geometrica da un diagramma di Feynman equivalente ad un disco con quattro “inserzioni” (Fig. 5.1). I. Shapiro e M. Virasoro ottennero una generalizzazione dell'ampiezza che poteva essere reinterpretata come un'ampiezza di diffusione di stringhe con estremi identificati (cerchietti, stringhe chiuse), relativa ad un diagramma di Feynman equivalente ad una sfera

¹Le risonanze sono particelle la cui vita media è talmente breve che non le si può osservare direttamente. Analizzando i prodotti del decadimento, è tuttavia possibile ricostruire alcune delle loro proprietà. Ad esempio, la presenza di una risonanza di massa m produce tipicamente un picco intorno ad m nel grafico della distribuzione della “massa invariante” del processo.

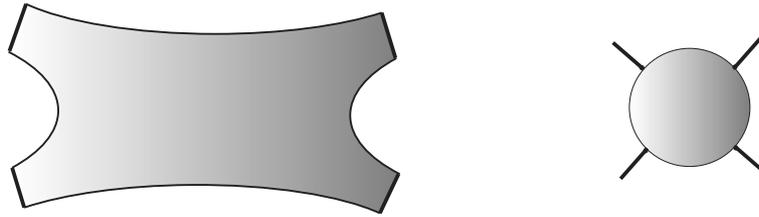


Figura 5.1: Diagramma relativo all'ampiezza di Veneziano.

con quattro “inserzioni” (Fig. 5.2). L'andamento “soffice” può essere spiegato come segue: l'interazione fra particelle è associata ad un “vertice” (Cap. 2), quindi è “dura” e localizzata in un punto, mentre l'interazione fra stringhe, in un certo senso, è distribuita lungo tutta la lunghezza ed è soffice. Le stringhe sono oggetti relativistici dotati di una dinamica propria, e possiedono una massa 0, per meglio dire, come entità unidimensionali, una massa per unità di lunghezza, detta “tensione di stringa”. Solitamente la si scrive nella forma

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad , \quad (5.1)$$

ove α' è la pendenza di Regge, che parametrizza il coefficiente angolare delle traiettorie lineari ed ha le dimensioni di un'area². Per “spiegare” le interazioni forti alla scala delle risonanze adroniche, la tensione di stringa deve essere scelta dell'ordine della scala di QCD, quindi $\sim GeV^2$. Si osservi, inoltre, che la descrizione dei modelli di Veneziano e Shapiro-Virasoro in termini di stringhe è matematicamente consistente soltanto se lo spazio-tempo nel quale le stringhe “vivono” ammette, oltre alla coordinata temporale, ben 25 dimensioni spaziali in luogo delle tradizionali 3.

Negli anni successivi gli esperimenti di “Deep Inelastic Scattering” (esaminati nel Cap. 2) dimostrarono che le ampiezze fra risonanze sono “dure” e non soffici, e che la QCD è la teoria che descrive le interazioni forti. In quel periodo, le stringhe vennero essenzialmente abbandonate, ed anzi vi fu una sorta di “caccia” ai teorici di stringhe. A metà degli anni settanta, tuttavia, J. Scherk e J.H. Schwarz, proposero di reinterpretare le teorie di stringhe come teorie unificate di tutte le forze e le particelle, piuttosto che come teorie per le interazioni forti. Le teorie con stringhe chiuse contengono sempre, infatti, stati di spin due e massa nulla interpretabili come gravitoni. Le stringhe aperte, d'altra parte, contengono stati che si possono assimilare a vettori di gauge. Collocando la tensione in eq. (5.1) alla scala di Planck anziché a quella di QCD, le teorie di stringhe si configurano come naturali candidati per una teoria quantistica finita della gravità accoppiata in modo naturale alle interazioni di gauge. La proposta di Scherk e Schwarz rende virtù i “vizi” dei modelli duali per le risonanze adroniche. Il comportamento soffice delle ampiezze ad alte energie, infatti, è esattamente l'ingrediente che rende la teoria quantistica “ben definita” nell'ultravioletto, priva delle divergenze che affliggono la versione quantistica della Relatività Generale. La presenza di extra-dimensioni spazio-temporali consente una riedizione delle idee di Kaluza e Klein in un contesto completamente nuovo, ove le dimensioni compatte sono consistenti con la scala estremamente piccola delle stringhe. Una stringa “vibrante” è una sovrapposizione di infiniti “modi normali” che vengono posti in corrispondenza con le

²In questo Capitolo verranno adottate unità naturali, in cui $\hbar = c = 1$. In tal modo la massa ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

tradizionali particelle. Le masse delle particelle sono legate alla frequenza dei modi di vibrazione. I modi “massivi”, tuttavia, corrispondono a frequenze dell’ordine della tensione di stringa, quindi a masse dell’ordine della scala di Planck. Solo i modi a massa nulla possono essere eccitati alle energie che oggi si è in grado di raggiungere negli esperimenti. La struttura di stringa dello spazio-tempo inoltre, emerge soltanto ad energie molto elevate, mentre alla scala elettrodebole, ovviamente, le stringhe vibranti appaiono puntiformi.

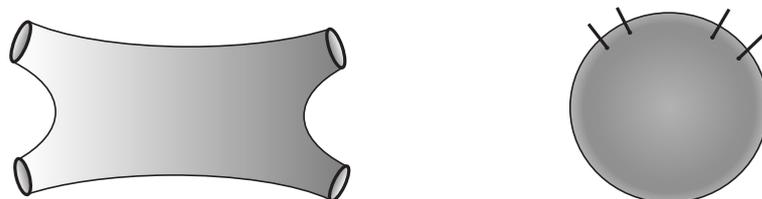


Figura 5.2: Diagramma relativo all’ampiezza di Shapiro-Virasoro.

Per incorporare modi che descrivano stati fermionici, occorre generalizzare i modelli di Veneziano e Shapiro-Virasoro (stringhe bosoniche) a stringhe che includano campi spinoriali. La consistenza richiede uno spazio-tempo con 9 dimensioni spaziali ed una temporale, ma il relativo ‘dual spinor model’ evidenzia problemi dovuti a modi che non rispettano la relazione tra spin e statistica ed a “tachioni”, stati con massa immaginaria, peraltro già presenti nella versione bosonica. Nel 1976, F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive riuscirono a concepire una proiezione dello spettro (da allora nota come proiezione GSO), poi rivelatasi connessa a profonde proprietà geometriche, che oltre a risolvere i problemi suddetti produce modelli supersimmetrici: è la nascita delle superstringhe. I modelli consistenti con superstringhe chiuse in dieci dimensioni esibiscono, a massa nulla, i modi corrispondenti alle supergravità di tipo IIA e IIB, illustrate nel Cap. 4, e sono dette superstringhe di Tipo IIA e IIB. È possibile definire anche una teoria con superstringhe aperte e chiuse, la superstringa di Tipo I, i cui modi nulli corrispondono alla supergravità di tipo I accoppiata con la Teoria di Yang-Mills supersimmetrica con gruppo di gauge $SO(32)$. All’inizio degli anni ’80, L. Alvarez-Gaumé e E. Witten mostrarono che le superstringhe di Tipo II obbediscono a proprietà di consistenza quantistica: sono, in altri termini, prive di anomalie di gauge, gravitazionali e miste. La teoria di Tipo I, viceversa, sembrava anomala. Nel 1984 M.B. Green e J.H. Schwarz furono in grado di dimostrare che in realtà le anomalie sono assenti anche nella teoria di Tipo I, grazie ad un nuovo meccanismo di cancellazione, automaticamente contenuto nella formulazione di stringa. Il lavoro ebbe un impatto fenomenale sulla comunità scientifica, e diede il via ad un periodo di grande fermento intorno alle superstringhe³. Il “meccanismo di Green e Schwarz” funziona, in realtà, anche per il gruppo eccezionale $E_8 \times E_8$, come dimostrato da J. Thierry-Mieg. Ben presto, nel 1985, D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm costruirono due nuove teorie di superstringhe chiuse in dieci dimensioni, dette eterotiche, con gruppo di gauge $SO(32)$ (HO) ed $E_8 \times E_8$ (HE), legate alla supergravità di tipo I accoppiata a teorie di gauge con i relativi gruppi.

Le superstringhe sono definite in uno spazio-tempo dieci-dimensionale. Per collegarle alla fisica in quattro dimensioni, occorre “estrarre” delle teorie effettive quadridimensionali. L’idea fondamentale è una riedizione, adattata ad oggetti estesi, del meccanismo di Kaluza-Klein, in precedenza discusso nel Cap. (3) (si veda anche App. A.13). P. Candelas, G. Horowitz, A.

³Alcuni teorici oggi parlano di “first superstring revolution”, prima rivoluzione delle superstringhe.

Strominger and E. Witten mostrarono che, con una scelta opportuna della varietà compatta nella classe delle varietà cosiddette di Calabi-Yau, si possono costruire modelli in quattro dimensioni con gravità accoppiata a spettri molto vicini allo spettro del MS. In particolare, esistono moltissime soluzioni esatte delle superstringhe con tali proprietà, costruite su limiti singolari di varietà di Calabi-Yau detti “orbifolds”, introdotti da L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa ed E. Witten. Verso la fine degli anni '80, inoltre, si chiarì completamente la natura dei modelli di Tipo I. Grazie ad una idea introdotta da A. Sagnotti nel 1987, infatti, la superstringa di Tipo I venne reinterpretata come una particolare proiezione della superstringa di Tipo IIB, oggi nota come “orientifold”. La comprensione della vera natura dei modelli di Tipo I diede inizio all’esplorazione sistematica degli “orientifolds” in dimensione più bassa.

Negli anni successivi, da un lato si cercò di ricavare il MS nell’ambito delle compactificazioni dell’eterotica (HE ed HO) e della Tipo I in 4 dimensioni, dall’altro ci si dedicò allo studio dello spazio dei parametri delle varie teorie e soprattutto degli aspetti “non perturbativi”. Verso la metà degli anni '90 si comprese finalmente che le teorie di (super)stringhe non sono teorie che contengono soltanto “stringhe”, ma genericamente oggetti estesi di dimensione p , le “ p -brane”⁴. L’esistenza di una serie di “relazioni sorprendenti”, note come dualità di stringa, diede il via ad un secondo periodo di grande fermento intellettuale⁵. Un ruolo cruciale deve essere attribuito alla scoperta, da parte di J. Polchinski nel 1995, di particolari “solitoni” che permeano gli spettri (perturbativi e non) delle superstringhe, noti come “Dirichlet p -Branes” (o, brevemente, D_p -brane), sui quali vivono confinati gli estremi delle stringhe aperte. Le dualità di stringa collegano fra loro spettri perturbativi apparentemente molto diversi, consentendo di stabilire che in realtà differenti superstringhe siano manifestazioni in regimi diversi di un’unico schema sottostante, noto come “Teoria M”⁶. La “teoria M” è definita in 11 dimensioni spazio-temporali, ammette come limite di “bassa energia” la supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 11$ e compendia le teorie di superstringhe note in alcuni “angoli” dello spazio dei parametri (Fig. 5.3). Della “Teoria M” non è disponibile alcuna formulazione completa, sono noti soltanto modelli parziali che ne descrivono il comportamento per alcune scelte dei parametri, ma certamente non è una teoria di “sole stringhe”, dato che non esistono modelli di stringa in grado di “completare” nell’ultravioletto la supergravità in 11 dimensioni. Tuttavia, si pensa che essa costituisca lo schema concettuale che unifichi in una teoria quantistica ben definita tutte le interazioni fondamentali, compresa l’interazione gravitazionale. Ovviamente, estrarre dallo schema di teoria M le manifestazioni della fisica in quattro dimensioni è impresa ardua: come per le superstringhe, esse dipendono fortemente dalle proprietà geometriche delle sette dimensioni extra interne (compatte) che le legano alla teoria in 11 dimensioni. Molti dettagli della fisica quadridimensionale si ottengono in funzione di parametri geometrici (moduli) che non sono, in alcun modo, fissati. La teoria, di conseguenza, è assai poco predittiva. Oggi, all’interno della comunità scientifica, si fronteggiano due attitudini contrapposte: da un lato si cerca un principio che selezioni “l’unico” vuoto, nello spazio degli infiniti vuoti disponibili, corrispondente al “vero” Universo. Dall’altro, si ritiene che nel “panorama” (il “landscape”) dei vuoti possibili, si possa determinare una sorta di descrizione statistica secondo la quale il “vero” Universo debba emergere come una configurazione di massima probabilità. Purtroppo,

⁴Ad esempio, le particelle sono 0-brane, le stringhe sono 1-brane. Le membrane o le superfici sono 2-brane, e così via.

⁵Si parla di “seconda rivoluzione delle superstringhe”.

⁶A seconda dei gusti degli autori e degli ambiti di discussione, M sta per Magica, Madre, Membrana, Mistero, Matrice, ecc.

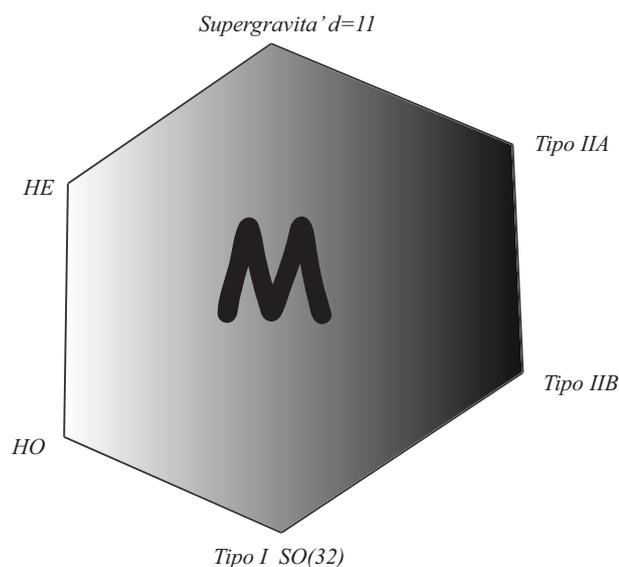


Figura 5.3: Teoria M.

si ha a disposizione un solo Universo; inoltre, studi statistici nello spazio delle possibili teorie sembrano molto questionabili. In conclusione, l'assenza di un Principio di Selezione del vuoto, che rende necessario il ricorso ad una qualche forma di "Principio Antropico", è di gran lunga il problema più profondo che si presenta nel tentativo di legare la poderosa costruzione di teoria M all'Universo osservato.

5.1 Stringhe e Particelle

La teoria delle (super)stringhe pone come costituenti elementari della materia oggetti estesi unidimensionali in luogo di punti materiali. Come visto, le (super)stringhe sono caratterizzate dalla loro dimensione, detta "lunghezza di stringa" $\ell_s = \sqrt{1/T} = \sqrt{2\pi\alpha'}$, o, in modo equivalente, dalla "scala di stringa" $M_s = 1/\ell_s$, entrambe legate alla "tensione di stringa" T precedentemente introdotta. Ad energie "basse" rispetto ad M_s , e dunque a distanze grandi rispetto ad ℓ_s , esse devono apparire come oggetti puntiformi in modo tale che la descrizione in termini di particelle sia valida almeno fino alla scala elettrodebole. Di conseguenza, la scala di stringa va assunta non inferiore al TeV . Un valore naturale sembrerebbe la scala di Planck M_P , ma esistono modelli compatibili con un valore di M_s intermedio arbitrariamente scelto tra $\sim 1 TeV$ ed M_P .

La dinamica di una stringa "bosonica" può essere dedotta per analogia con la dinamica del punto materiale. Una particella elementare si muove nello spazio-tempo percorrendo una traiettoria che si chiama "linea di universo". In ogni punto, la linea d'universo definisce la posizione della particella ad un certo istante di tempo, misurato nel sistema di riferimento considerato. La descrizione è caratterizzata da due proprietà: le linee di universo sono determinate dall'essere quelle, tra tutte le possibili, di lunghezza minima (principio di minima azione). Inoltre, la descrizione del moto non può dipendere dalla scelta di coordinate spaziali e temporali, deve essere "covariante" per riparametrazioni della linea d'universo. Allo stesso modo, una stringa in

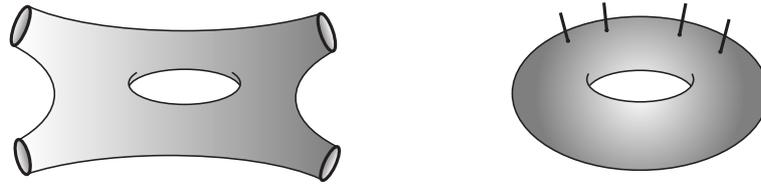


Figura 5.4: Diagramma ad 1 loop per l'ampiezza di quattro stringhe chiuse.

moto nello spazio percorre una superficie bidimensionale, nota come “world-sheet” o “superficie d’universo”. Di nuovo, il moto si svolge lungo le superfici d’area minima, e le equazioni che lo definiscono non possono dipendere dalle coordinate scelte per descrivere la superficie. Dal punto di vista matematico, una stringa bosonica è dunque descrivibile in termini di un insieme di campi scalari bidimensionali, funzioni della posizione lungo la stringa e del tempo. Ciascuna coordinata è una corda vibrante bidimensionale che soddisfa l’equazione delle onde. Le interazioni, d’altra parte, sono puramente geometriche nello spazio-tempo in cui le stringhe sono immerse, essendo legate alla topologia delle superfici spazzate durante il moto. Ad esempio, un diagramma come quello visto in figura 5.2 corrisponde ad un’ampiezza ad albero in cui una coppia di stringhe chiuse si annichila, dando luogo ad una stringa chiusa intermedia che decade in una nuova coppia di stringhe chiuse. Il corrispondente diagramma ad 1 loop del processo è illustrato in figura 5.4. La differenza fra i due grafici di Feynman si può collocare completamente nella topologia della superficie intermedia fra stati entranti ed uscenti, che nel caso di figura 5.2 è quella di una sfera, mentre nel caso di figura 5.4 è quella di un toro (una ciambella). Gli esempi appena illustrati corrispondono ad interazioni tra stringhe chiuse, che spazzano superfici prive di bordi, compatte ed orientabili. La classe di diagrammi diviene più complicata se si includono nel gioco le stringhe aperte, i cui estremi siano liberi di muoversi nello spazio-tempo. Le superfici spazzate contengono in tal caso dei bordi e possono risultare non orientabili. In figura 5.5 è riportato un diagramma ad un loop di stringhe aperte, in cui la superficie interme-



Figura 5.5: Diagramma ad 1 loop per l'ampiezza di quattro stringhe aperte.

dia è un cilindro (superficie orientabile con due bordi). L’analogo “non orientabile” è illustrato in figura 5.6, in cui la topologia della superficie intermedia è quella di una striscia di Möbius (superficie non orientabile con un bordo). Le stringhe chiuse corrispondono a campi scalari con estremi identificati periodicamente. Le corrispondenti “corde vibranti” possiedono due insiemi di “modi” di Fourier indipendenti, che per convenienza verranno indicati come modi “sinistri” e “destri”. Nella teoria quantistica (App. A.7), i modi corrispondono ad operatori di creazione e distruzione che determinano lo spettro degli stati sullo spazio di Fock (Si veda anche l’App.

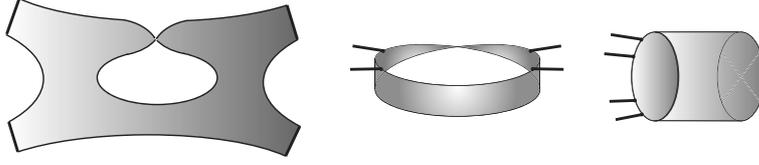


Figura 5.6: Diagramma non orientabile ad 1 loop per l'ampiezza di quattro stringhe aperte.

A.4). Un campo bosonico di stringa chiusa si può sviluppare nel modo seguente:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right) . \quad (5.2)$$

Da osservare che le costanti sono scelte per convenienza, in modo che il campo abbia le dimensioni di una “lunghezza”. L'indice μ è relativo allo spazio-tempo nel quale la stringa si propaga, x^μ descrive la posizione del centro di massa della stringa, p^μ l'impulso medio. Le coordinate τ e σ parametrizzano le direzioni spaziale e temporale sul “world-sheet”. Gli $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n$ sono gli operatori di creazione e distruzione dei modi di oscillazione “sinistri” e “destri”. Infatti, definendo $a_n^\mu = \sqrt{n} \alpha_n^\mu$ (ed analogha espressione per i modi destri), essi soddisfano l'algebra di Heisenberg seguente

$$[a_n^\mu, a_k^\nu] = -\delta_{nk} \eta^{\mu\nu} . \quad (5.3)$$

Gli \tilde{a}_n^μ soddisfano un'identica algebra, e commutano con gli a_n^μ . L'algebra di Heisenberg (5.3) è molto simile all'algebra degli operatori di creazione e distruzione ottenuta nel caso dell'oscillatore armonico (App. A.4), eccezion fatta per $\mu = \nu = 0$, in cui il segno di η^{00} sembra “sbagliato”. I corrispondenti operatori nella direzione zero sono “spuri”: essi generano stati con norma negativa. Ad esempio, lo stato $|s\rangle = a_1^{0,+}|0\rangle$ è tale che

$$\|s\|^2 = \langle s|s\rangle = \langle 0|a_1^0 a_1^{0,+}|0\rangle = \langle 0|[a_1^0, a_1^{0,+}]|0\rangle = -\langle 0|0\rangle \eta^{00} = -1 ; \quad (5.4)$$

la consistenza matematica del modello deve assicurare che tali stati “spuri” scompaiano dallo spettro fisico, come accade in elettromagnetismo alle componenti “longitudinali” dei fotoni eliminate dall'invarianza di gauge. L'invocata indipendenza dalle coordinate nella descrizione del “world-sheet”, si traduce nell'invarianza per trasformazioni generali di coordinate bidimensionali. Per via dell'invarianza di scala, esse risultano in generale anomale. Nella teoria quantistica, la simmetria di gauge effettiva dopo la scelta di coordinate in eq. (5.2) è l'invarianza rispetto al gruppo conforme in due dimensioni, ovvero il gruppo delle trasformazioni analitiche della coordinata complessa $z = \exp(\tau + i\sigma)$. È assolutamente cruciale che l'invarianza conforme sia preservata a livello quantistico, allo scopo di assicurare uno spettro privo di stati spurii. La cancellazione della relativa anomalia (l'anomalia di traccia in due dimensioni) costringe la dimensione dello spazio-tempo, ovvero il numero dei campi X^μ , ad essere $d = 26$. Uno spazio con 25 dimensioni può, a prima vista, sembrare molto strano. Eppure $d = 26$ emerge esattamente dal calcolo dell'anomalia.

La cancellazione dell'anomalia conforme non è sufficiente a caratterizzare lo spettro delle stringhe bosoniche chiuse. Esistono infatti delle anomalie ulteriori assai sottili, legate a trasformazioni globali relative alla geometria delle superfici di Riemann e dovute, in ultima analisi, alla maniera corretta di combinare il settore dei modi sinistri con quello dei modi destri. I

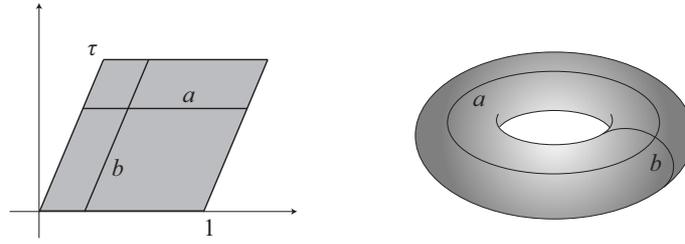


Figura 5.7: Poligono fondamentale per il toro.

diagrammi di Feynman, come osservato in precedenza, dipendono dai parametri che descrivono le superfici di Riemann intermedie e da quelli che descrivono le posizioni delle stringhe entranti ed uscenti. Si consideri l'esempio del toro. Come noto, lo si può tagliare lungo le due curve “non contraibili” (cicli di omologia) e lo si può aprire sul piano complesso. Esso risulterà un parallelogramma con lati opposti identificati, la cui forma è legata, una volta che il ciclo “orizzontale” viene normalizzato ad 1 (opzione sempre possibile), ad un parametro complesso τ con parte immaginaria positiva, detto modulo del toro (Fig. 5.7). Il τ compendia le coordinate spaziale e temporale sulla stringa. Nel diagramma, tuttavia, è impossibile decidere se il tempo sia la direzione “orizzontale” oppure la direzione “verticale”. Alcuni dei diagrammi che sembrano avere τ diversi, in realtà corrispondono semplicemente a ridefinizioni della direzione del “tempo”. Le trasformazioni di questo tipo formano un gruppo, detto “gruppo modulare”. Ogni elemento del gruppo modulare si ottiene combinando opportunamente i generatori $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ ed $S : \tau \rightarrow -1/\tau$, in cui la T corrisponde ad inclinare il parallelogramma senza cambiarne l'area, mentre la S scambia le direzioni del toro. Il gruppo modulare completo risulta dall'insieme delle trasformazioni

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{con } ad - bc = 1 \text{ e } a, b, c, d \text{ interi.} \quad (5.5)$$

Ovviamente, le quantità fisiche non possono dipendere dal valore di τ scelto per descriverle. Ci si può allora restringere, ad esempio, alla cosiddetta “regione fondamentale”

$$\mathcal{F} = \{ \tau : -1/2 < \text{Re}(\tau) < 1/2, |\tau| \leq 1, \text{Im}(\tau) > 0 \} \quad , \quad (5.6)$$

illustrata in figura 5.8, purchè le quantità fisiche siano *invarianti modulari*. L'invarianza modulare è la condizione per combinare correttamente i settori sinistro e destro della stringa bosonica: è possibile analizzarne gli esiti sullo spettro delle oscillazioni. Uno dei miracoli della stringa è il fatto che i modi non producano necessariamente delle oscillazioni con frequenza strettamente positiva. Si deve infatti ricordare che le stringhe chiuse sono teorie della gravità. Le energie di vuoto della teoria quantistica vanno opportunamente normalizzate. Le fluttuazioni quantistiche consentono infatti frequenze nulle (stati privi di massa) ed addirittura frequenze negative (tachioni). Definendo

$$N = \sum_{n \geq 0} \alpha_n^{+,i} \alpha_n^i, \quad i = 1, \dots, 24 \quad (5.7)$$

gli operatori che corrispondono al “livello” delle frequenze nel settore sinistro, e gli identici “tilde” per il settore destro, il contributo all'operatore di massa del settore sinistro risulta

$$m_L^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - 1) \quad , \quad (5.8)$$

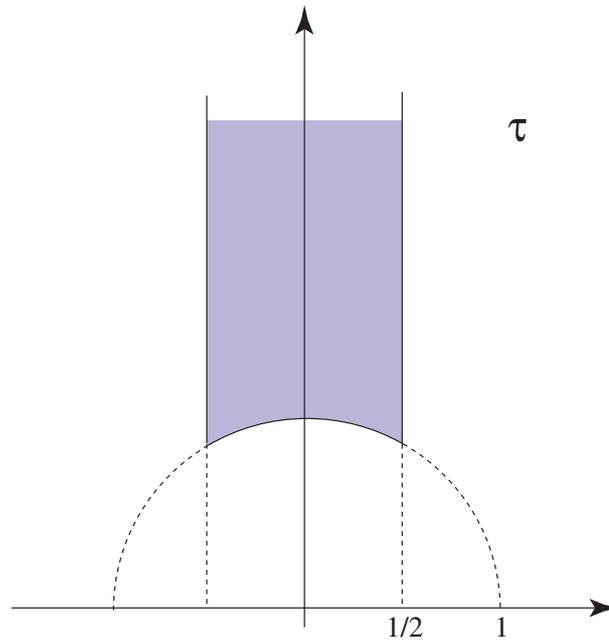


Figura 5.8: Regione fondamentale per il parametro modulare.

mentre quello per il settore destro

$$m_R^2 = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - 1) \quad . \quad (5.9)$$

Si osservi che solo oscillatori con le regole di commutazione “giuste” contribuiscono, l'indice zero non compare in equazione (5.7). La prescrizione di invarianza modulare si traduce, sullo spettro, nella cosiddetta condizione di “level matching”, secondo cui i modi sinistri e destri devono fornire lo stesso contributo. Lo spettro risulta dunque la sovrapposizione dei contributi (5.8) e (5.9)

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) \quad , \quad (5.10)$$

con la condizione che $m_L^2 = m_R^2$, ovvero $N = \tilde{N}$. Lo spettro di massa risultante è presto descritto: il vuoto $|0\rangle$ è uno stato “tachionico”, con $m^2 = -4/\alpha'$, e corrisponde al caso in cui $N = \tilde{N} = 0$. Il primo livello “eccitato” si ottiene con $N = \tilde{N} = 1$. Esso contiene gli stati a massa nulla $\alpha_1^{+,\mu} \alpha_1^{+,\nu} |0\rangle$, che portano indici spazio-temporali 26-dimensionali, è infatti un tensore a due indici che può essere decomposto in una componente antisimmetrica $B^{\mu\nu}$, una componente simmetrica priva di traccia $G^{\mu\nu}$ e la traccia, uno scalare ϕ . Questi campi possiedono esattamente i gradi di libertà di un gravitone ($G^{\mu\nu}$), di una due-forma o tensore antisimmetrico (o campo di Kalb-Ramond) $B^{\mu\nu}$, e di uno scalare, detto dilatone. In realtà i soli gradi di libertà trasversi, quelli relativi ai valori di μ e ν compresi tra 1 e 24 sono fisici, mentre α_n^0 ed α_n^{25} sono eliminati dai vincoli di invarianza conforme. Ecco, allora, che la stringa bosonica chiusa include in modo naturale tra gli stati dello spettro i quanti del campo gravitazionale. Il settore appena

descritto viene detto settore universale. Esso compare in tutte le teorie di (super)stringhe chiuse. L'ubiquità dei gravitoni giustifica la proposta delle teorie di stringhe come candidati naturali per la descrizione di una teoria quantistica della gravità. Gli stati massivi hanno masse dell'ordine di $M_S \sim 1/\sqrt{\alpha'}$ e sono organizzati in multipletti massivi del gruppo di Lorentz 26-dimensionale, dando luogo a tensori di spin intero e dunque a stati bosonici (di qui il termine stringa bosonica).

Vale la pena di sottolineare che l'energia di "punto zero" negativa, che permette l'esistenza delle oscillazioni a massa nulla, è un effetto quantistico, dovuto al fatto che la corretta definizione del vuoto richiede che su di esso tutti gli operatori diano risultato nullo. La procedura, nota come ordinamento normale, consiste nel riordinare gli operatori "classici" N ed \tilde{N} . L'espressione classica dell'operatore in eq. (5.7) risulta infatti

$$N_{cl} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{+\mu} \alpha_{n,\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\mu} \alpha_{n,\mu}^+ \quad , \quad (5.11)$$

e dunque vi è una energia del vuoto che risulta dall'ordinamento degli α_n e che vale $\sum_{n=1}^{\infty} n$. L'energia è infinita, ma si può opportunamente regolarizzare e rinormalizzare osservando che coincide con la funzione $\zeta(z)$ di Riemann calcolata nel punto $z = -1$, in cui $\zeta(-1) = -1/12$, esattamente in accordo con i vincoli di invarianza conforme e modulare! Si osservi ancora che i campi della stringa bosonica hanno modi interi. L'energia del vuoto sarebbe diversa per campi con modi "spostati" rispetto agli interi. Ad esempio, se lo spostamento fosse di una quantità η , vale a dire si avessero indici con valori $n \pm \eta$, l'energia di vuoto valutata con tecniche analoghe sarebbe $E_0 = -1/24 + 1/4\eta(1 - \eta)$ nel settore sinistro, ed identica nel settore destro.

Con identico metodo si possono descrivere i modi della stringa bosonica "aperta". In tal caso le condizioni al bordo, anziché periodiche, sono condizioni di "Neumann", che consentono agli estremi della stringa aperta di muoversi liberamente nello spazio-tempo. Se gli estremi si fanno corrispondere ai valori di $\sigma = 0, \pi$, si deve imporre che le derivate rispetto alla coordinata spaziale σ soddisfino $X'^{\mu}(0, \tau) = X'^{\mu}(\pi, \tau) = 0$. I modi di oscillazione coincidono con le "onde stazionarie" di una corda vibrante, con un solo insieme di modi. Il campo può essere sviluppato nella forma

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^{\mu}}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right) \quad . \quad (5.12)$$

La teoria deve risultare, anche in tal caso, invariante rispetto a trasformazioni conformi allo scopo di eliminare gli stati spuri. La presenza di un solo insieme di modi, invece, collegata alla presenza di bordi nelle corrispondenti superfici di Riemann, indica che l'invarianza modulare non è più una proprietà delle ampiezze. Del resto, i bordi rendono esplicita la scelta della direzione temporale dei diagrammi. Lo spettro, senza la condizione di "level matching", è assai semplice. L'operatore di massa risulta

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} (N - 1) \quad (5.13)$$

ove N indica di nuovo l'operatore di "livello". La stringa aperta ammette dunque un vuoto $|0\rangle$ tachionico con $m^2 = -1/\alpha'$, stati a massa nulla $\alpha_n^{+\mu}$, che formano un vettore del gruppo di Lorentz in 26 dimensioni. Inoltre stati massivi di masse $\sim M_S$ che riempiono multipletti del gruppo di Lorentz. Agli stati di stringa aperta possono essere associati dei fattori di teoria dei gruppi, attaccando delle cariche agli estremi delle stringhe aperte (i cosiddetti "fattori di

Chan-Paton”, che rendono la stringa aperta una sorta di “mesone”). In tal modo, il vettore di Lorentz diviene a tutti gli effetti un campo di gauge.

Un’ultima osservazione fondamentale: la stringa bosonica chiusa descrive in modo naturale la gravità, mentre la stringa bosonica aperta descrive le teorie di gauge. Tuttavia, una teoria con sole stringhe aperte non sarebbe unitaria. Il motivo, assai profondo, può essere rintracciato proprio nel significato della scelta del “tempo” per i diagrammi di stringa aperta. Infatti, si consideri il diagramma di Feynman “non planare” di figura 5.9, relativo a due stringhe aperte che dopo aver interagito percorrono un loop e riemergono ancora come una coppia di stringhe aperte. Invertendo la scelta del tempo, il diagramma può essere letto come un diagramma ad

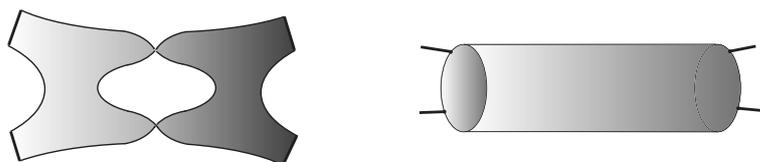


Figura 5.9: Diagramma aperto “non planare”.

albero in cui due stringhe aperte producono una stringa chiusa che decade ancora in due stringhe aperte. In altri termini, negli stati intermedi dei diagrammi di stringhe aperte, compaiono *necessariamente* stringhe chiuse. È impossibile descrivere solo i campi di gauge: le stringhe richiedono inevitabilmente la presenza delle interazioni gravitazionali. Tuttavia, per ottenere modelli di stringhe che possano sembrare aderenti alla realtà, occorre escludere i tachioni ed introdurre fermioni chirali, e per questo c’è bisogno di stringhe “supersimmetriche”.

5.2 Stringhe Supersimmetriche

Introdurre stati fermionici spazio-temporali nelle teorie di stringhe non è impresa facile. Come già descritto nel caso della stringa bosonica, infatti, lo spazio-tempo emerge come “concetto collettivo”, nel senso che la dimensione dello spazio-tempo è legata al numero di coordinate X^μ introdotte, dettato dalla consistenza quantistica. La simmetria di Lorentz e di Poincaré in dimensioni 26 risulta essere una simmetria globale mentre i campi di stringa “descrivono” direttamente lo spazio-tempo, in un certo senso lo determinano, anziché esserne dipendenti. Accanto alle coordinate “bosoniche” X^μ , appare naturale tentare di introdurre delle coordinate “fermioniche” ψ^μ che, nello spirito della supersimmetria, siano spinori bidimensionali. Essi, come analizzato nel Cap. 4 possono esistere in stati puramente “sinistri” o puramente “destri”, a differenza dei campi bosonici, ed inoltre possono essere quantizzati consistentemente sia con condizioni periodiche che antiperiodiche. Nel secondo caso, detto di Neveu-Schwarz (NS), il campo fermionico possiede modi seminteri e può essere espanso nella forma

$$\psi_{NS}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_{n+1/2}^\mu e^{-2i(n+1/2)(\tau-\sigma)} \quad (5.14)$$

$$\tilde{\psi}_{NS}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{b}_{n+1/2}^\mu e^{-2i(n+1/2)(\tau+\sigma)} \quad , \quad (5.15)$$

ove gli operatori b_n^μ e \tilde{b}_n^μ soddisfano l’algebra di Heisenberg anticommutante, $\{b_n^\mu, b_m^{+\nu}\} = -\delta_{mn}\eta^{\mu\nu}$, con il consueto “segno errato” dovuto alla direzione temporale. Viceversa, nel caso

di condizioni periodiche il campo fermionico, detto di Ramond (R), possiede modi interi

$$\psi_R^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad (5.16)$$

$$\tilde{\psi}_R^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad . \quad (5.17)$$

Gli operatori d_n^μ soddisfano di nuovo l'algebra di anticommutazione. Si osservi che, mentre l'algebra nel caso NS non possiede modi nulli, l'algebra R contiene gli operatori d_0^μ , che non mutano l'energia del vuoto. L'azione di ciascun d_0^μ su un vuoto produce un altro stato con la stessa energia, un altro vuoto degenere. Insomma, il vuoto nel settore di Ramond, anzichè essere unico, è un multipletto di stati, la cui natura può essere dedotta dall'algebra stessa. I modi zero, infatti, soddisfano

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad , \quad (5.18)$$

ovvero l'algebra di Clifford. Il vuoto nel settore di Ramond è quindi un vettore di una rappresentazione dell'algebra di Clifford, ossia uno spinore spazio-temporale. Inoltre, l'energia di vuoto dei settori NS e R scaturisce nuovamente dal "normal ordering", risultando, a causa della relazione spin-statistica, esattamente opposta a quella dei bosoni. Ciascun fermione di R vi contribuisce, di conseguenza, per un fattore $1/24$, mentre ciascun spinore di NS vi contribuisce per $-1/48$. L'invarianza conforme (o per meglio dire superconforme, dato che l'inclusione degli spinori bidimensionali rende la teoria localmente supersimmetrica in due dimensioni) impone che la dimensione dello spazio-tempo sia, questa volta, $d = 10$. Per comprendere quali settori spinoriali vadano inclusi, si deve di nuovo invocare l'invarianza modulare. Le proiezioni GSO consistenti corrispondono infatti ai diversi invarianti modulari. La proiezione GSO fu introdotta per ovviare ai diversi inconvenienti che in apparenza affliggono le stringhe fermioniche. Nel settore NS, ad esempio, l'energia di vuoto può essere calcolata sommando un contributo $-1/24$ per ciascun X^i e $-1/48$ per ciascun ψ^i (con $i = 1, \dots, 8$), per un totale di $8(-1/24 - 1/48) = -1/2$. Lo stato fondamentale è quindi ancora un tachione. Inoltre, il primo stato eccitato, pur portando un indice vettoriale, viene creato dall'azione sul vuoto di un operatore anticommutante, $\psi^{+\mu}|0\rangle$. Nel settore di Ramond, d'altro canto, il vuoto risulta a massa nulla (infatti i contributi di bosoni e fermioni, entrambi periodici, si cancellano: $8(-1/24 + 1/24) = 0$) ma non chirale. La proposta geniale di GSO fu quella di proiettare lo spettro in modo da rispettare spin-statistica nel settore di NS e proiettare su una delle componenti chirali il vuoto nel settore R, includendo nello stesso tempo in maniera coerente tutte le possibili combinazioni di condizioni al bordo, vale a dire NS a sinistra e NS a destra (NS-NS), ma anche NS-R, R-NS e R-R. Il risultato della proiezione appare sorprendente e meraviglioso insieme. Vi sono due opzioni distinte riguardanti la scelta di chiralità dei vuoti di R. Il vuoto sinistro può avere la stessa chiralità del vuoto destro, oppure chiralità opposta. Nel primo caso, si ottiene la superstringa di Tipo IIB. Infatti, lo spettro a massa nulla prevede nel settore NS-NS gli stati $\psi_{1/2}^{+\mu}|0\rangle \otimes \tilde{\psi}_{1/2}^{+\nu}|\tilde{0}\rangle$, corrispondenti al consueto settore universale delle stringhe chiuse, con dilatone, gravitone e due-forma. Il settore R-R contiene gli stati $|0\rangle_R^+ \otimes |\tilde{0}\rangle_R^+$, che sono prodotti di spinori con uguale chiralità in dieci dimensioni. Essi danno luogo ad uno scalare ϕ' , una due-forma $C^{\mu\nu}$ ed una quattro-forma $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ con curvatura autoduale (in modo da contenere soltanto 35 dei 70 gradi di libertà della quattro forma). Infine, nei settori misti NS-R e R-NS compaiono i gravitini che nella Tipo IIB corrispondono agli stati $\psi_{1/2}^{+\mu}|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle_R^+$ e $|0\rangle_R^+ \otimes \tilde{\psi}_{1/2}^{+\nu}|\tilde{0}\rangle$ ed hanno identica chiralità. Confrontando quanto riportato nel capitolo 4, si può riconoscere nelle oscillazioni a

massa nulla della teoria di Tipo IIB esattamente il contenuto della supergravità di tipo IIB in $d = 10$. In effetti, la supersimmetria è l'altro "bonus" della proiezione GSO: la teoria è priva di tachioni ed esibisce lo stesso numero di stati fermionici e bosonici ad ogni livello di massa. Una dimostrazione spettacolare si ottiene dal calcolo della funzione di partizione, ovvero dell'energia libera, che racchiude in sé il conteggio degli stati. Bosoni e fermioni contribuiscono in maniera opposta, quindi in una teoria supersimmetrica l'energia libera deve risultare nulla. Il calcolo produce una meravigliosa combinazione di certe funzioni ellittiche (le funzioni theta di Jacobi) che fu provato da Jacobi essere nulla ⁷.

La scelta della proiezione GSO con vuoti di Ramond di diversa chiralità produce la superstringa di Tipo IIA che, non sorprendentemente, contiene la supergravità di tipo IIA del Cap. 4 come insieme dei modi a massa nulla. Il settore universale NS-NS, infatti, non muta rispetto alla Tipo IIB, mentre il settore R-R si decompone a fornire un vettore C^μ ed una tre-forma $C^{\mu\nu\rho}$, insieme ai gravitini dei settori misti. Le superstringhe di Tipo II sono teorie puramente gravitazionali.

Nel 1984, in una serie di contributi notevolissimi, M. Green e J.H. Schwarz mostrarono che anche la supergravità di tipo I può essere resa priva di anomalie, a condizione di accoppiarla ad una teoria di Super-Yang-Mills con gruppo di gauge $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. La cancellazione, altamente non triviale, avviene attraverso l'introduzione di un nuovo controtermine locale nella Lagrangiana. La superstringa di Tipo I $SO(32)$, che verrà discussa in dettaglio nel prossimo paragrafo, è l'ovvio "completamento ultravioletto" della supergravità con gruppo $SO(32)$. D'altra parte, N. Marcus e A. Sagnotti avevano dimostrato nel 1982 che i gruppi eccezionali non possono essere associati agli stati delle teorie con stringhe aperte, quali la Tipo I. Doveva esistere una nuova teoria che potesse incorporare il gruppo $E_8 \times E_8$. Ben presto, nel 1985, venne costruita da D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm la stringa eterotica⁸. Si tratta di una teoria di superstringhe chiuse che nasce dalla combinazione del settore sinistro della superstringa e del settore destro della stringa bosonica. In particolare, sono presenti 10 campi X^μ contenenti componenti sinistre e destre, 10 fermioni chirali sinistri ψ^μ , e nel settore destro 16 extra bosoni chirali⁹. Questi ultimi devono comparire come coordinate "interne", essendo i generatori delle "correnti" che danno luogo ai gradi di libertà di gauge. L'idea geniale fu quella di considerarli vincolati su una varietà compatta con la topologia di un toro che sia tale da rispettare i vincoli di consistenza matematica, in particolare l'invarianza modulare. La condizione si traduce nella proprietà seguente: il reticolo che definisce il toro 16-dimensionale (analogo al caso 2-dimensionale di figura 5.7) deve essere un reticolo pari (quindi il prodotto scalare di due vettori del reticolo deve essere un intero pari) e autoduale (ovvero coincidere con il reticolo duale). Esiste una classificazione matematica dei reticoli 16-dimensionali e, magicamente, soltanto due possiedono i requisiti richiesti: il reticolo dei pesi dell'algebra $spin(32)/Z_2$ ed il reticolo dei pesi della somma diretta di due algebre e_8 , esattamente i reticoli in grado di produrre spettri con i gruppi di gauge privi di anomalie trovati da Green e Schwarz!

Vale la pena di analizzare in dettaglio lo spettro dei modi a massa nulla. Anzitutto, il settore sinistro è lo stesso delle superstringhe di Tipo II ed in seguito alla proiezione GSO

⁷L'annullarsi della combinazione è così sorprendente che Jacobi stesso etichettò il risultato come "aequatio identica satis abstrusa".

⁸Testualmente, eterosi è un processo che in genetica consiste nell'ibridazione di genotipi diversi allo scopo di ottenere un aumento dello sviluppo. In altre parole, mescolando due tipi si ottiene un ibrido "migliore".

⁹Per bosone chirale si intende una soluzione puramente destra dell'equazione delle onde, che si può pensare come una soluzione generale associata ad un vincolo che azzeri la componente sinistra.

contiene un gravitino e la gamma-traccia, entrambi chirali. Il settore di NS coincide col settore universale. Stati aggiuntivi derivano dai vettori di lunghezza 2 del reticolo, le radici, che corrispondono alla classe di coniugio della rappresentazione aggiunta. Vi sono due possibili teorie: l'Eterotica con vettori di gauge nell'aggiunta del gruppo $E_8 \times E_8$ (HE) e quella con vettori di gauge nell'aggiunta di $SO(32)$ (HO). Lo spettro a massa nulla di HO coincide con lo spettro a massa nulla della Tipo I $SO(32)$ (del resto, la supergravità di tipo I è unica in $d = 10$), ma le due teorie appaiono profondamente diverse negli stati massivi e in generale nella struttura. Si osservi che la consistenza matematica automaticamente conduce ai gruppi privi di anomalie. Inoltre, i due modelli possiedono gruppi di gauge potenzialmente interessanti per la fenomenologia, in special modo HE, che si riduce facilmente in quattro dimensioni ad una teoria $\mathcal{N} = 1$ con gruppo $E_6 \times E_8$, dei quali il primo è un gruppo GUT mentre il secondo può facilmente giocare il ruolo del “settore nascosto”. Per questa ragione si è ritenuto per molti anni che HE potesse essere la teoria finale.

5.3 Stringhe Aperte, Brane e Compattificazioni

Le teorie con (super)stringhe aperte, le prime ad essere descritte nel modello di Veneziano, si basano su regole costruttive assai sofisticate. Come osservato, da un lato esse richiedono la contemporanea presenza di stringhe chiuse, pena la perdita di unitarietà, dall'altro una loro descrizione perturbativa necessita dell'introduzione di superfici di Riemann con bordi e non orientabili. I vincoli costruttivi traggono origine dall'interpretazione delle (super)stringhe aperte come particolari settori di (super)stringhe chiuse, in cui modi sinistri e destri siano identificati. La costruzione, nota in letteratura come “Orbifold nello spazio dei parametri” o più comunemente “Orientifold”, è stata proposta nel 1987 da A. Sagnotti e sviluppata alla fine degli anni '80 da una parte del gruppo teorico dell'Università di Roma “Tor Vergata” (M. Bianchi, G. Pradisi, A. Sagnotti, Ya.S. Stanev ed anche C. Angelantonj).

L'orientifold si basa sull'osservazione, per teorie chiuse di Tipo IIB con settori sinistro e destro completamente identici, che sia possibile individuare una operazione di simmetria che scambi i due settori, la “world-sheet parity”, realizzata da un opportuno operatore Ω . Le classi di equivalenza di stringhe chiuse sotto l'azione di Ω , ovvero per scambio dei modi sinistri e destri, sono stringhe “non orientate”, che si propagano su superfici di Riemann compatte e non orientabili. Un esempio è la “bottiglia di Klein”, che si può ottenere tagliando un toro lungo uno dei cicli di omologia e reincollandolo dopo aver effettuato un “twist” che scambia l'orientazione del ciclo. Il poligono fondamentale sul piano complesso, analogo a quello del toro di figura 5.7, è riportato in figura 5.10. Si osservi che il parametro modulare assume valori puramente immaginari, ed i lati lungo il ciclo orizzontale sono identificati in modo antiperiodico. Lo scambio della direzione del “tempo”, a differenza del toro, non è una simmetria: con un tempo “verticale” (canale diretto) si descrive un diagramma ad 1 loop di stringhe chiuse che vengono emesse dal vuoto, subiscono un “twist” e vengono poi riassorbite; un tempo orizzontale (canale trasverso) deve essere interpretato come relativo ad un grafico di Feynman “ad albero” di stringhe chiuse emesse da stati coerenti particolari detti “crosscaps”¹⁰. Le proprietà ultraviolette nel canale “di loop” corrispondono a proprietà infrarosse nel canale “ad albero”,

¹⁰Il crosscap, dal punto di vista geometrico, è il piano proiettivo reale. Ogni superficie non orientabile si può ottenere da una orientabile “incollandovi” sopra uno o due crosscap (tre essendo equivalenti ad uno). La striscia di Möbius, ad esempio, è un disco con un crosscap, la bottiglia di Klein è una sfera con due crosscap.

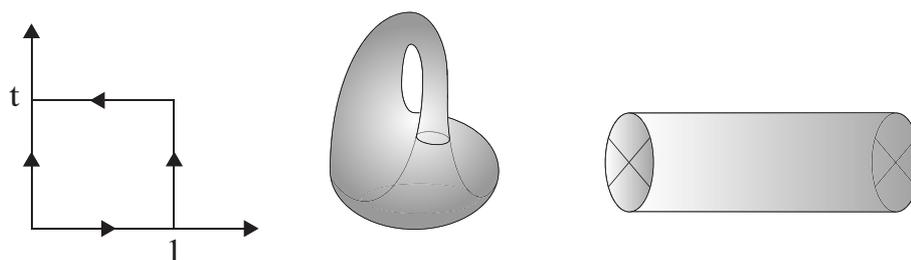


Figura 5.10: Poligono fondamentale, canale diretto e canale trasverso della bottiglia di Klein.

ove il tempo proprio si inverte. L'introduzione di stringhe non orientate attraverso l'azione di Ω conduce a divergenze ultraviolette legate al valore nullo del parametro modulare. Quando il tempo diretto tende a zero, il tempo trasverso tende all'infinito, dando luogo ad una superficie "degenere" in cui il tubo di figura 5.10 diviene infinitamente lungo. Gli stati che attraversano il tubo assumono un valore d'aspettazione non nullo nel vuoto, percorrendo diagrammi detti "tadpoles". I "tadpoles" relativi a stati a massa nulla che vengano emessi od assorbiti dal vuoto con impulso nullo corrispondono ad ampiezze divergenti nell'infrarosso. Un tadpole, in genere, se legato a stati dello spettro, segnala una instabilità dovuta ad una scelta errata del vuoto. Un tadpole di particelle "non fisiche", viceversa, rappresenta una inconsistenza della teoria, e deve essere cancellato.

La cancellazione dei tadpoles non fisici richiede la presenza delle superstringhe aperte. Esse sono dotate di "estremi", cui sono legati i portatori dei gradi di libertà di gauge, le cariche di Chan-Paton. L'operatore che scambia fra loro gli estremi viene detto "world-sheet parity" aperta, Ω_o . Le stringhe che si ottengono per proiezione sotto l'azione di Ω_o vengono dette "non orientate". Esse si propagano descrivendo superfici di Riemann non orientabili e con bordi: ad esempio, ad 1 loop, descrivono anelli e nastri di Möbius. Il poligono fondamentale di un anello è riportato in figura 5.11. Da osservare che, come nel caso della bottiglia di Klein, il modulo

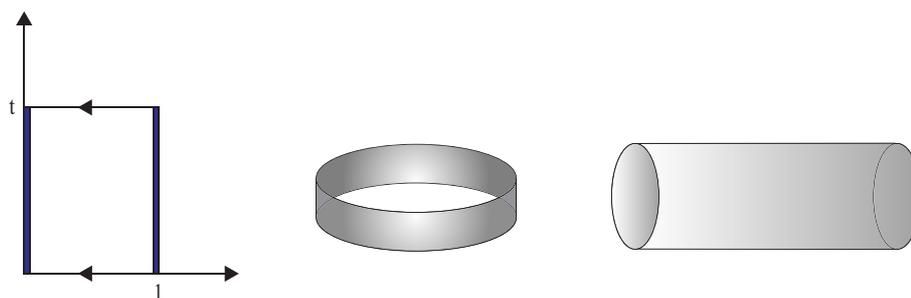


Figura 5.11: Poligono fondamentale, canale diretto e canale trasverso dell'anello.

è puramente immaginario, e la presenza dei bordi rende le direzioni del tempo sul diagramma di nuovo non equivalenti. Un tempo verticale caratterizza il diagramma in cui una stringa aperta viene emessa nel vuoto e riassorbita dopo aver percorso 1 loop, mentre un tempo orizzontale corrisponde ad un diagramma ad albero di stringa chiusa emessa e riassorbita tra due

stati coerenti “di bordo”¹¹. Il diagramma di Möbius è più sottile: nel canale diretto si riduce semplicemente alla proiezione via Ω_o del diagramma di anello, mentre nel canale trasverso è un’ampiezza chiusa tra un bordo ed un crosscap (Fig. 5.12). I diagrammi aperti esibiscono divergenze ultraviolette corrispondenti a valori del tempo diretto nullo, che si traducono, nel canale trasverso, in diagrammi con “tubi” infinitamente lunghi e quindi con tadpoles degli stati corrispondenti di stringa chiusa. Nei modelli consistenti, detti modelli di Tipo I¹², i tadpoles dei modi non fisici si cancellano tra stati “di bordo” e stati “di crosscap”, lasciando la teoria priva di divergenze ultraviolette. Una rappresentazione “pittorresca” di tale cancellazione è il-

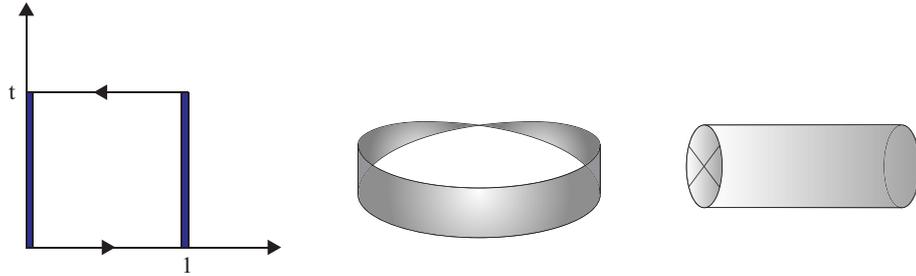


Figura 5.12: Poligono fondamentale, canale diretto e canale trasverso della striscia di Möbius.

lustrata in figura 5.13. Vale la pena di rammentare che nel caso delle stringhe chiuse l’assenza di divergenze ultraviolette è legata all’invarianza modulare. I tadpoles quindi stanno alle superstringhe di Tipo I come l’invarianza modulare alle superstringhe chiuse: in entrambi i casi il contributo “pericoloso” dovuto ai diagrammi con “tempo proprio” nullo è zero. L’invarianza modulare, inoltre, fissa i gruppi di gauge e garantisce, come visto, la cancellazione di anomalie. Analoghe condizioni sono garantite dalla cancellazione, più in generale, dei tadpoles dei settori di R-R: essi determinano i gruppi di gauge compatibili e sono equivalenti alle condizioni di cancellazione delle anomalie. Nei modelli supersimmetrici, la cancellazione dei tadpoles di R-R garantisce la contemporanea cancellazione dei tadpoles di NS-NS. Nei modelli non supersimmetrici, viceversa, i tadpoles di NS-NS sopravvivono e vanno opportunamente interpretati. Ad esempio, un tadpole del dilatone conduce tipicamente ad un termine di costante cosmologica.



Figura 5.13: Condizione di cancellazione del “tadpole”.

È utile analizzare la superstringa di Tipo I $SO(32)$ in $d = 10$. Si tratta del modello più semplice con stringhe chiuse ed aperte non orientate. Lo spettro a massa nulla del settore chiuso è il troncamento non orientato dello spettro della Tipo IIB, in cui sopravvivono il dilatone ed il

¹¹Geometricamente il bordo è un disco.

¹²Va detto che una analoga costruzione, dovuta a N. Marcus e A. Sagnotti, è possibile per le stringhe bosoniche, ove tuttavia permane la divergenza dovuta al tachione.

gravitone dal settore NS-NS, ed il tensore antisimmetrico dal settore R-R, ricostruendo il settore universale. Dai settori misti sopravvive un gravitino e la gamma-traccia, che completano la supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 10$. Il settore di gauge deriva completamente dalle superstringhe aperte. La proiezione GSO produce un vettore di gauge equipaggiato del relativo gaugino, entrambi nella rappresentazione aggiunta del gruppo, determinato dal tipo di proiezione non orientata. Il vettore è etichettato da una coppia di indici nella rappresentazione fondamentale di dimensione N , quella della carica sul bordo. Nel caso in cui l'azione di Ω_o sia triviale sul vettore, gli stati di stringa aperta formano un multipletto con N^2 componenti, corrispondente all'aggiunta del gruppo $U(N)$. Se invece il vettore viene proiettato dall'azione di Ω_o in modo da simmetrizzare (o antisimmetrizzare) lo spettro, il multipletto esibisce $N(N+1)/2$ (o $N(N-1)/2$) componenti come nell'aggiunta di $USp(N)$ (o $SO(N)$). La cancellazione del tadpoles impone che il vettore sia antisimmetrizzato e che la dimensione del gruppo sia $N = 32$, determinando automaticamente il gruppo $SO(32)$: di nuovo, la consistenza della superstringa implica che la teoria effettiva di bassa energia, la supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 10$ accoppiata alla teoria di super Yang-Mills con gruppo $SO(32)$, sia automaticamente priva di anomalie (ed unica in tal caso, in quanto i gruppi eccezionali non sono gruppi di Chan-Paton ammissibili).

Riepilogando, esistono cinque teorie di superstringhe consistenti in dieci dimensioni. Sono teorie quantistiche prive di divergenze ultraviolette, che descrivono quantitativamente la gravità. In alcune di esse, HE, HO e Tipo I, è possibile includere teorie di gauge con gruppi che possano contenere (almeno) il gruppo del MS o un gruppo di grande unificazione. Gli spettri perturbativi manifestano contenuti assai diversi, anche se a bassa energia producono essenzialmente delle supergravità accoppiate a teorie di super Yang-Mills. Per collegare le superstringhe al mondo quadridimensionale, occorre che sei delle nove dimensioni spaziali vengano in qualche modo “nascoste”. L'idea alla base di una simile riduzione, da dieci a quattro, delle dimensioni spazio-temporali “percepite dall'osservatore” di nuovo utilizza la teoria di Kaluza-Klein (Cap. 3 ed App. A.13). Lo spazio-tempo dieci dimensionale viene interpretato come il prodotto cartesiano di uno spazio-tempo quadridimensionale e di una varietà compatta interna sei-dimensionale

$$M^{10} = M^4 \times K^6 . \quad (5.19)$$

Di nuovo, la varietà K^6 deve essere in qualche senso “piccola” ed arrotolata su se stessa. Le extra coordinate potrebbero essere rivelate soltanto se avessimo a disposizione “sonde” che possano risolvere dimensioni dell'ordine del “volume” della varietà interna compatta. Ovviamente, un volume alla scala di Planck, $V = (\ell_{Planck})^6$, sarebbe largamente inaccessibile agli esperimenti attuali e, con elevata probabilità, a quelli concepibili in futuro. La storia, tuttavia, è leggermente più complicata. Oltre alla scala di Planck ed al volume della varietà compatta, anche la scala di stringa va tenuta in considerazione. Nei modelli eterotici, le tre scale sono indissolubilmente legate, quindi sia il volume di compattificazione che la scala di stringa risultano dell'ordine della scala di Planck. Viceversa, nei modelli di Tipo I, a causa della contemporanea presenza di stringhe chiuse insieme a stringhe aperte, la scala di stringa non è fissata, e la scala di Planck, come vedremo nei prossimi paragrafi, può emergere a spese di extra-dimensioni compatte ma “grandi”, tali addirittura da poter essere viste ad LHC.

Un aspetto fondamentale della compattificazione riguarda la necessità di ottenere in quattro dimensioni una teoria “effettiva” non supersimmetrica, o al massimo con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria, come spiegato nei precedenti capitoli. Le cariche di supersimmetria in dieci dimensioni danno luogo alle corrispondenti cariche di supersimmetria in quattro dimensioni. Nella

riduzione dimensionale (menzionata nel Cap. 4), esempio più semplice di compattificazione in cui la varietà interna è un toro di dimensione sei, lo spinore in dieci dimensioni corrisponde a 16 supercariche, dando luogo ad una teoria $\mathcal{N} = 4$ in quattro dimensioni. Per ottenere teorie con un numero inferiore di supersimmetrie la varietà compatta deve avere proprietà geometriche molto particolari, legate alle proprietà di trasporto di un vettore lungo curve chiuse. Come discusso nel Cap. 3, se si percorre con un vettore un cammino chiuso su una varietà curva lasciandolo parallelo a sè stesso, al termine del viaggio si otterrà in generale un vettore ruotato rispetto a quello iniziale. Si immagina ora di considerare “tutti i possibili” cammini chiusi e classificare i vettori finali. Si ottiene in tal modo il cosiddetto “gruppo di ologonia” della varietà. Il gruppo di ologonia è un sottogruppo del gruppo delle rotazioni in sei dimensioni ($SO(6)$). Si può dimostrare che per avere $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria in quattro dimensioni, la varietà interna K^6 deve avere un gruppo di ologonia $SU(3)$. Tali spazi vengono detti di Calabi-Yau¹³. La geometria di tali spazi è assai complicata. Di essi, a parte casi particolarmente semplici (ad esempio il toro), non è nota la metrica. Se ne può studiare tuttavia la topologia, che mostra come le varietà di Calabi-Yau possiedano sottovarietà di dimensioni zero, due, quattro ed anche sei. Per avere un’idea della loro forma, si può osservare la figura 5.14, in cui sono evidenti buchi e maniglie di varie dimensioni che si intersecano in forme molto complicate (si consideri che questa è solo una sezione tridimensionale di una varietà di dimensione sei). La topologia si descrive attraverso dei

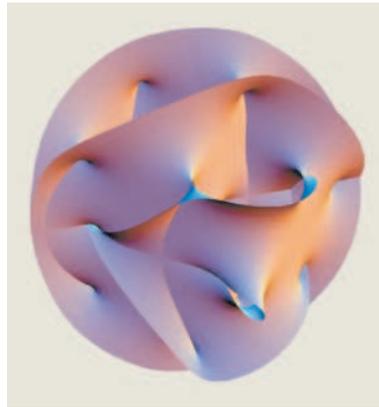


Figura 5.14: Esempio di varietà di Calabi-Yau.

numeri che ne caratterizzano, appunto, le “sottovarietà” (e di conseguenza anche le possibili “forme differenziali”), detti numeri di Hodge. Ad essi sono legati i parametri che descrivono le classi inequivalenti di spazi di Calabi-Yau, i cosiddetti “moduli” della compattificazione, analoghi al parametro τ che è stato descritto per il toro. I moduli corrispondono, nella teoria di bassa energia, a campi scalari con potenziale nullo. Di conseguenza, tutte le grandezze fisiche della teoria effettiva, comprese le costanti d’accoppiamento ed i termini di Yukawa, dipendono dal valore dei moduli ovvero dal vev dei campi scalari, che tuttavia, essendo relativi a direzioni piatte, risultano completamente arbitrari. Ogni diverso punto dello spazio dei moduli produce

¹³L’esistenza degli spazi di Calabi-Yau fu congetturata da E. Calabi nel 1957 e provata da S.-T. Yau nel 1977. Da osservare anche che recentemente sono state considerate compattificazioni su spazi più generali, in cui siano presenti anche flussi non nulli dei campi di gauge. In tal caso le varietà su cui la stringa si propaga sono più generali delle varietà di Calabi-Yau

una diversa teoria efficace in quattro dimensioni o, meglio, un possibile vuoto. Sarebbe auspicabile la scoperta di un Principio fondamentale di Selezione del vuoto, che dipenda in qualche senso dalla consistenza matematica della teoria. Per ora tale principio non è disponibile. Anzi, il numero di vuoti consistenti in quattro dimensioni è molto elevato, probabilmente infinito. Il “problema dei moduli” è chiaramente il problema più importante della teoria delle superstringhe. Da esso dipende, in larga misura, la predittività delle teorie, quindi la possibilità di stabilire una connessione con la fisica sperimentale.

Vale la pena, per la semplicità e nello stesso tempo la profondità delle idee contenute, analizzare il caso della stringa bosonica compattificata su un cerchio. L'esempio contiene in sé tutti gli ingredienti necessari per comprendere le ricadute della procedura di compattificazione sulla fisica in quattro dimensioni. Una coordinata definita su un cerchio di raggio R (indicato di solito con $S^1(R)$, la sfera unidimensionale) deve soddisfare la condizione di periodicità $X(\tau, \sigma) = X(\tau, \sigma + \pi) + 2\pi R$, secondo la quale punti che “distanza” $2\pi R$ sono identificati. È evidente che una stringa chiusa si può allacciare intorno al cerchio un numero intero arbitrario di volte. Inoltre, non è possibile deformare con continuità una stringa chiusa allacciata n volte in una allacciata k volte (con $k \neq n$). Lo spettro, in altri termini, è composto da infiniti settori topologici non equivalenti, che si possono etichettare per mezzo del “numero di avvolgimento” (“winding number”), che tiene appunto conto del numero di volte che la stringa risulta allacciata intorno al cerchio. In termini tecnici, lo sviluppo della coordinata di stringa chiusa, rispetto al caso tradizionale di eq. (5.2), vede modificati i soli modi nulli, mentre la parte oscillatoria, di per sé periodica, resta invariata. Lo sviluppo nello spazio di Fourier dell'unica coordinata X^1 quindi risulta

$$X^1(\tau, \sigma) = x^1 + 2\alpha' \frac{m}{R} \tau + 2\pi n \sigma + \frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right) \quad , (5.20)$$

ove l'impulso è ora quantizzato in multipli m del raggio del cerchio, come per la particella libera in Meccanica Quantistica, mentre l'altro intero n è il numero di avvolgimento. Se dunque si considera uno spazio-tempo della forma $M^{25} \times S^1$, prodotto di uno spazio-tempo 25-dimensionale e della circonferenza S^1 , lo spettro di massa dei modi nulli può essere ora descritto in modo analogo a quanto fatto per la stringa bosonica su M^{26} . Vi è un contributo aggiuntivo dovuto al fatto che per avvolgere la stringa n volte, bisogna in qualche modo “stirarla” spendendo energia. Si ottiene infatti

$$\mathcal{M}^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) + \frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2 R^2}{(\alpha')^2} \quad , \quad (5.21)$$

con la condizione, questa volta, che $N - \tilde{N} = m n^{14}$. È assai istruttivo analizzare lo spettro risultante. La coordinata compatta ora non fa parte dello spazio-tempo, quindi l'indice ad essa relativo deve essere soppresso. Gli stati con $n = m = 0$

$$\begin{aligned} |i, j\rangle &= \alpha_1^{+,i} \alpha_1^{+,j} |0\rangle \quad , \quad i, j = 2, \dots, 24, \\ |i, 1\rangle &= \alpha_1^{+,i} \alpha_1^{+,1} |0\rangle \quad , \quad i = 2, \dots, 24, \\ |1, j\rangle &= \alpha_1^{+,1} \alpha_1^{+,j} |0\rangle \quad , \quad j = 2, \dots, 24, \\ |1, 1\rangle &= \alpha_1^{+,1} \alpha_1^{+,1} |0\rangle \quad , \end{aligned} \quad (5.22)$$

¹⁴ \mathcal{M} è il consueto operatore in eq. (5.10), indicato in modo da non essere confuso con l'intero m relativo all'impulso.

descrivono il settore universale della stringa, ma in dimensione 25 anzichè 26, due vettori ed un campo scalare: esattamente gli stati di Kaluza-Klein della riduzione dimensionale. In teoria dei campi questo sarebbe tutto. Invece le stringhe sono oggetti estesi e parte dell'energia può essere spesa per allacciarle intorno al cerchio. È facile dall'equazione (5.21) estrarre, ad esempio, a massa nulla degli stati con $(m = \pm\sqrt{2}, n = 0)$ e $(m = 0, n = \pm\sqrt{2})$, a condizione che il raggio assuma il valore cosiddetto "selfduale" $R = \sqrt{\alpha'}$. Si osservi, inoltre, che lo spettro non cambia sotto le seguenti trasformazioni, dette T-dualità, che scambiano momenti e avvolgimenti ridefinendo nello stesso tempo il raggio del cerchio:

$$m \longleftrightarrow n \quad ; \quad R \longleftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \quad . \quad (5.23)$$

In altri termini, lo spettro in termini di (m, n, R) è del tutto identico allo spettro in termini di (m', n', R') , ove $m' = n, n' = m$ ed $R' = \alpha'/R$. La T-dualità è una proprietà dello spettro perturbativo, e si può dimostrare valida, in realtà, per tutti gli operatori della teoria, non solo per lo spettro. Il significato fisico è importantissimo: la teoria è la stessa se il raggio di compattificazione è grande, oppure se è molto piccolo, a patto di scambiare il ruolo delle "eccitazioni elementari", i momenti m , con le "eccitazioni solitoniche", gli stati topologici, gli avvolgimenti n . I valori del raggio nell'intervallo da 0 a $\sqrt{\alpha'}$ sono del tutto equivalenti a quelli nell'intervallo da $\sqrt{\alpha'}$ ad infinito. Uno dei due intervalli può essere considerato lo "spazio dei moduli", l'insieme nel quale l'unico modulo presente in tal caso, R , assume valori indipendenti. Esiste inoltre una lunghezza minima del raggio di compattificazione, di nuovo la scala di stringa, al di sotto della quale non si può scendere. Il principio di indeterminazione deve essere modificato di conseguenza: non vi è la possibilità di localizzare un oggetto meglio della scala di stringa: non si può mai raggiungere la precisione infinita, propria di un raggio nullo. Se si introducono i settori sinistro e destro dei modi nulli, come nel caso non compatto, ponendo

$$P_L = \frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \quad , \quad P_R = \frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \quad , \quad (5.24)$$

la T-dualità agisce in modo simile ad una "parità sinistra", in quanto lascia immutato P_R ed invece cambia il segno di P_L . In altri termini, essa può essere interpretata come una trasformazione sulla coordinata di stringa che agisce mappando $X^1(\tau, \sigma) = X_R^1(\tau, \sigma) + X_L^1(\tau, \sigma)$ in $X^{1,T}(\tau, \sigma) = X_R^1(\tau, \sigma) - X_L^1(\tau, \sigma)$.

La T dualità è una simmetria dello spettro e delle interazioni in teoria delle perturbazioni. Se applicata alle teorie eterotiche, continua a restare una simmetria. Tuttavia compattificando su un cerchio la HE ovvero la HO¹⁵ si ottiene a bassa energia la stessa supergravità con gruppo di gauge $SO(16) \times SO(16)$. Il risultato netto è che, in nove dimensioni, le due teorie HE ed HO sono in realtà un'unica manifestazione della stessa teoria a meno di T-dualità. Se nel limite di $R \rightarrow \infty$, vale a dire quando il cerchio si può reinterpretare come una coordinata non compatta ("limite di decompattificazione") si ottiene la HE, nel limite di $R \rightarrow 0$ si riottiene la HO. Le due teorie sono esattamente identiche a raggio autoduale. La situazione è più intrigante nelle superstringhe di Tipo II. La T-dualità, essendo una trasformazione di parità sui campi sinistri, inverte in ogni direzione compatta la chiralità degli spinori sinistri, in particolare del vuoto di Ramond sinistro. Ovvero, inverte la chiralità relativa dei vuoti di Ramond, mappando la Tipo

¹⁵Per essere precisi, occorre includere nelle compattificazioni opportuni vev di campi di gauge, noti come "linee di Wilson".

IIA nella Tipo IIB quando il numero di dimensioni compatte su cui si effettua la T-dualità è dispari. In particolare, compattificando in $d = 9$ su un cerchio di raggio R si ottiene:

$$\text{Tipo IIB su } S^1(R) \equiv \text{Tipo IIA su } S^1\left(\frac{\alpha'}{R}\right) \quad . \quad (5.25)$$

Assai interessante risulta il comportamento sotto T-dualità delle stringhe di Tipo I e più genericamente delle stringhe e superstringhe aperte. La stringa bosonica aperta in 26 dimensioni obbedisce a condizioni al bordo di “Neumann”, che impediscono flusso di momento nella direzione della stringa o, in altri termini, consentono agli estremi di muoversi liberamente nello spazio-tempo 26-dimensionale. Si consideri un stringa aperta ora su $M^{25} \times S^1(R)$ con condizioni di Neumann. L’unica differenza con l’espressione di eq. (5.12) risiede nel fatto che il momento è ora quantizzato lungo la direzione compatta: $p^1 = m/R$, con m intero. Non ci sono “avvolgimenti”, perchè una stringa aperta si può sempre slacciare. La coordinata compatta si può scrivere separando i settori sinistro e destro:

$$X^1(\tau, \sigma) = x^1 + 2\alpha' \frac{m}{R} \tau + \text{Osc} = X_L^1(\tau - \sigma) + X_R^1(\tau + \sigma) \quad , \quad (5.26)$$

ove, ovviamente,

$$\begin{aligned} X_L^1(\tau - \sigma) &= \frac{x^1}{2} + \alpha' \frac{m}{R} (\tau - \sigma) - \frac{c}{2} + \text{Osc} \quad , \\ X_R^1(\tau + \sigma) &= \frac{x^1}{2} + \alpha' \frac{m}{R} (\tau + \sigma) + \frac{c}{2} + \text{Osc} \quad . \end{aligned} \quad (5.27)$$

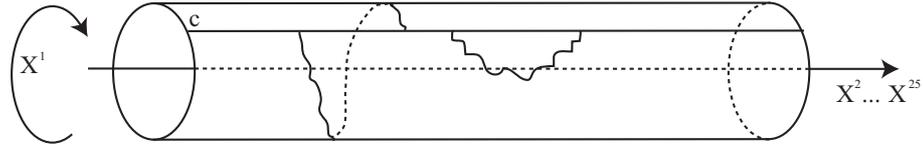
c è una costante arbitraria scelta nell’intervallo $[0, 2\pi R)$ e gli oscillatori sono separati semplicemente riscrivendo il coseno in forma esponenziale. In seguito alla trasformazione di T-dualità, la coordinata sinistra subisce l’inversione di parità. Di conseguenza, la coordinata di stringa aperta diviene della forma

$$X^{1,T}(\tau, \sigma) = X_R^1(\tau + \sigma) - X_L^1(\tau - \sigma) = c + 2\alpha' \frac{m}{R} \sigma + \text{Osc}, \quad (5.28)$$

che, se interpretata in termini del cerchio T-duale di raggio $R' = \alpha'/R$ e degli avvolgimenti $n' = m$, risulta

$$X^{1,T}(\tau, \sigma) = c + 2n'R'\sigma + \text{Osc}. \quad (5.29)$$

La coordinata T-duale soddisfa non più condizioni di “Neumann” bensì condizioni di Dirichlet, della forma $X^{1,T}(\tau, 0) = c$, $X^{1,T}(\tau, \pi) = c + 2n'\pi R'$, il cui significato è ben chiaro: la stringa aperta T-duale ha gli estremi confinati a giacere sulla varietà definita dalla condizione $X^{1,T} = c$. Per capire che tipo di varietà sia, si consideri una analoga condizione nello spazio euclideo R^3 , parametrizzato dalle coordinate x, y, z . La varietà corrispondente, ad esempio, ad $x = x_0$, è il piano parallelo al piano yz e posizionato ad x_0 lungo l’asse x . Se si fossero fissate due direzioni, ad esempio $x = x_0$ e $y = y_0$, se sarebbe ottenuta la retta parallela all’asse z che buca il piano xy nel punto di coordinate (x_0, y_0) . Fissando tutte e tre le coordinate la varietà risultante sarebbe un punto. Lo spazio in cui si muove la stringa bosonica è R^{25} . Fissando una coordinata, lo spazio risultante diviene un iperpiano di dimensione 24, così come in R^3 si ottiene un piano di dimensione 2. Includendo nella definizione anche la coordinata temporale, si suole dire che l’iperpiano ad X^1 fissata corrisponde al volume di universo di una 24-brana, che, in seguito alla presenza delle condizioni di Dirichlet, viene detta Dirichlet 24-brana, o più semplicemente

Figura 5.15: Stringhe aperte su una D_{24} -brana.

D_{24} -brana. Alla luce della definizione, lo spazio-tempo originario 26-dimensionale può essere assimilato ad una D_{25} -brana (così come R^3 potrebbe pensarsi una 3-brana). La T-dualità può essere riassunta come segue: nelle coordinate originali si descrive una stringa aperta bosonica i cui estremi sono liberi di muoversi in tutto lo spazio, ovvero sono vincolati a stare sulla D_{25} -brana. Effettuando una T-dualità nella direzione 1, si ottiene una stringa aperta in cui gli estremi sono ora liberi di muoversi soltanto entro una D_{24} -brana, mentre sono fissati nella direzione 1. L'avvolgimento n definisce il numero di volte che la stringa aperta è allacciata intorno alla direzione compatta mantenendo gli estremi su $X^1 = c$ (Fig. 5.15). Vale la pena analizzare di nuovo il significato fisico del limite di decompattificazione per sottolineare la differenza fra le stringhe chiuse ed aperte. Se $R \rightarrow \infty$, nel caso della stringa chiusa è come essere nello spazio esteso. Di conseguenza il momento m/R tende a divenire un continuo, mentre l'avvolgimento selezionato è il solo $n = 0$, dovendosi spendere un'energia elevatissima per allacciare la stringa intorno alla direzione compatta. Se invece si considera il limite $R \rightarrow 0$, il discorso è lo stesso nell'ambito duale: gli avvolgimenti tendono a diventare un continuo (si spende una energia piccolissima per allacciare la stringa intorno ad un cerchio di raggio piccolissimo) mentre gli impulsi divergono, quindi è impresa molto difficile eccitare uno stato di impulso non nullo. Di nuovo si riottiene la stringa chiusa non compatta! Assai diversa è la situazione con le stringhe aperte. Nel limite infatti in cui $R \rightarrow \infty$, gli impulsi tendono a divenire un continuo quindi si riottiene in effetti la stringa aperta non compatta. Viceversa, il limite $R \rightarrow 0$ è meglio interpretato come il limite di decompattificazione nella teoria T-duale. Poiché la stringa è immobile nella direzione Dirichlet con l'unico possibile avvolgimento nullo, in effetti sembra una stringa aperta in dimensione 25 anziché 26. In altri termini, la teoria che vive sul "volume di universo" della D_{24} -brana è effettivamente la riduzione dimensionale della teoria originaria da 26 a 25 dimensioni.

Le D_p -brane sono iperpiani rigidi nella descrizione di teoria delle perturbazioni, ovvero quando la costante d'accoppiamento della stringa tende a zero. La grande intuizione di J. Polchinski del 1995¹⁶ fu quella di ritenere le D_p -brane oggetti dinamici. Lo spettro delle stringhe aperte i cui estremi giacciono sulle D_p -brane, infatti, rappresenta una indicazione in tal senso: nella rappresentazione convenzionale, a massa nulla compare lo stato $A^\mu = \alpha_1^{\mu,+}|0\rangle$, con $\mu = 1, \dots, 24$, il vettore in 26 dimensioni. Nella rappresentazione T-duale, tuttavia, l'interpretazione dello spettro cambia: le fluttuazioni contengono infatti il vettore in 25 dimensioni $A^i = \alpha_1^{i,+}|0\rangle$, con $i = 2, \dots, 24$, legato alle coordinate "longitudinali", quelle *sulla* D_{24} -brana, mentre le fluttuazioni nella direzione ortogonale danno luogo a $\Phi = \alpha_1^{1,+}|0\rangle$, un campo scalare che descrive le oscillazioni quantistiche della posizione della D_{24} -brana. La teoria sul "volume

¹⁶L'idea delle D -brane fu introdotta per la prima volta nel 1989 da J. Dai, R.G. Leigh e J. Polchinski. Modelli perturbativi con stringhe aperte che esibiscono condizioni di Dirichlet furono studiati per la prima volta da G. Pradisi e A. Sagnotti, sempre nel 1989.

di universo” (dato dalle direzioni X^2, \dots, X^{26} e dal tempo X^0) della D_{24} -brana è una teoria di gauge $U(1)$ in dimensione 25.

È possibile concepire gruppi non abeliani nelle stringhe aperte descritte in termini delle D_p -brane cui si accoppiano? In altri termini, è possibile interpretare nel contesto delle D_p -brane i fattori di Chan-Paton? La risposta è affermativa e sorprendente. Si consideri infatti una sovrapposizione di N D_p -brane coincidenti, tutte nello stesso punto, come in figura 5.16 (in gergo si chiama uno “stack” di D_p -brane). Per comprendere la teoria sul loro volume di universo, conviene contare gli stati a massa nulla che descrivono le fluttuazioni di questo semplice sistema. Le stringhe aperte attaccate alle brane possono partire e terminare su una qualsiasi di esse. Ciascuna stringa ammette come fluttuazioni a massa nulla un vettore nello spazio-tempo che corrisponde alla dimensione del “volume di universo”, quindi uno spazio-tempo di dimensione $p + 1$. In totale, vi sono dunque N^2 vettori, che vanno a formare un multipletto nella rappresentazione aggiunta di $U(N)$ ¹⁷. I fattori di Chan-Paton delle stringhe aperte orientate, che nella descrizione di “world-sheet” sembrano posticci, sono quindi semplicemente relativi al numero di D_p -brane alle loro estremità. Ancor più sorprendente è la situazione se si “separano” alcune delle D_p -brane dalle altre. Ad esempio, spostandone una soltanto, le stringhe aperte che vanno dalla brana isolata alle altre $N - 1$ diventano massive. Viceversa, restano a massa nulla tutte le altre. Lo “stack” delle $N - 1$ immobili fornisce un vettore di $U(N - 1)$, mentre la brana isolata fornisce un altro $U(1)$. In conclusione, la separazione delle brane corrisponde alla rottura del gruppo di gauge, quindi ad una sorta di meccanismo di Higgs! La rottura è spontanea nel senso che dipende dalla distanza r fra i due stack di brane e scompare se r , che gioca il ruolo del vev, viene posto a zero. Le teorie di Tipo I contemplano la contemporanea

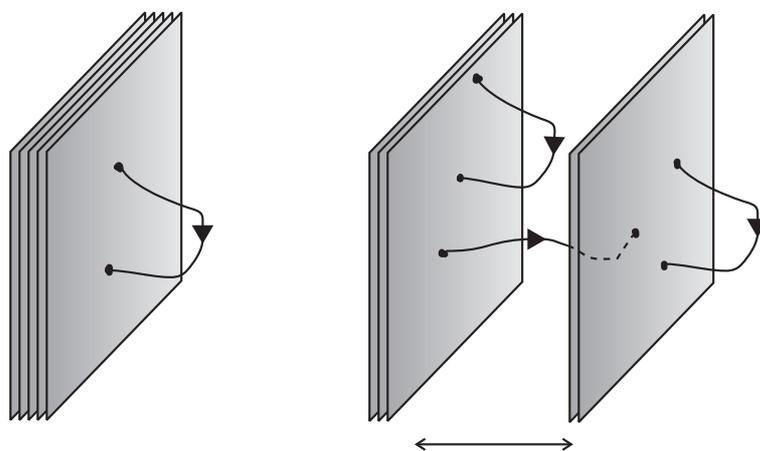


Figura 5.16: Stringhe aperte su stacks di D -brane.

presenza di stringhe non-orientate. In simili condizioni, il ruolo della T-dualità va combinato con l'azione dell'operatore Ω_o . L'azione di Ω_o scambia i settori sinistro e destro della teoria, quindi è una simmetria di $X = X_L + X_R$. Viceversa, sulla coordinata T-duale, $X^T = X_R - X_L$, lo scambio dei settori sinistro e destro produce un'azione che mappa X^T in $-X^T$. Tale azione ammette, sul cerchio di raggio R , due punti fissi: l'origine ed il punto medio πR . Sulla stringa completa, i punti fissi sono delle varietà fisse rispetto all'azione di $T \circ \Omega_o$, detti piani di Orien-

¹⁷Non si pretende di fornire una dimostrazione ma solo un argomento di plausibilità.

tifold, O_p -piani. L'azione di Ω_o su ogni altro punto equivale ad una riflessione rispetto ai piani di orientifold. Quindi teorie che rispettino Ω_o come simmetria, devono rispettare la simmetria di riflessione rispetto ai piani di orientifold. Ad esempio, posizionando una D_p -brana nel punto x del cerchio, l'azione di Ω costringe ad inserire una D_p -brana immagine nel punto $2\pi R - x$. Di conseguenza, in teorie con stringhe aperte e chiuse non orientate, se si introduce uno stack di N D_p -brane su un punto generico, occorre mettere altre N D -brane sul punto immagine. Il conteggio degli stati è di nuovo illuminante. Lo spazio da considerare è ora soltanto metà del cerchio, lo spazio tra i due piani di orientifold. Si usi l'indice $[i]$ per indicare la D_p -brana, e l'indice $[\bar{i}]$ per indicare l'immagine. Le stringhe aperte $[i, j]$, cioè che partono dalla brana $[i]$ e terminano sulla brana $[j]$ sono a massa nulla, mentre le stringhe $[i, \bar{j}]$ sono massive, essendo stirate tra brana ed immagine. Il gruppo risultante, con $2N$ brane presenti, questa volta è $U(N)$. Ora si immagini di muovere M brane (e le loro immagini) fino a sovrapporle al piano di orientifold. In tal modo, sulle restanti $N - M$ brane si ha un gruppo $U(N - M)$, mentre le brane a massa nulla tra quelle che giacciono sul piano di orientifold, si hanno le $[i, j]$, le $[\bar{i}, \bar{j}]$, le $[\bar{i}, j]$ e le $[i, \bar{j}]$, però considerando che l'azione di Ω_o ritiene soltanto la combinazione simmetrica (o antisimmetrica) sotto lo scambio degli estremi. Come ovvio, quindi, le brane sul piano di orientifold producono un gruppo $USp(M)$ (o $SO(M)$), di nuovo legato al "numero" di D_p -brane.

L'individuazione di oggetti estesi p -dimensionali dinamici, consente una reinterpretazione dei diagrammi di Feynman di stringhe aperte e chiuse in termini di spazio-tempo anziché di world-sheet. Ad esempio, un diagramma come quello di figura 5.17, che nel canale diretto corrisponde ad una stringa aperta emessa e riassorbita dal vuoto, nel canale trasverso può essere reinterpretato come un diagramma in cui due D_p -brane interagiscono ad una distanza pari alla lunghezza del cilindro scambiandosi stringhe chiuse. In altri termini, le D_p -brane sono

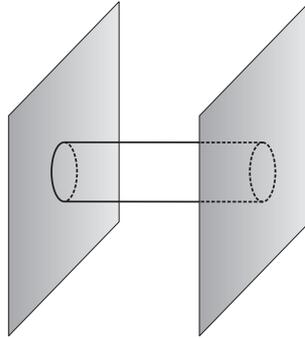


Figura 5.17: Due D_p -brane interagiscono scambiandosi stringhe chiuse.

le controparti spazio-temporali degli stati di bordo incontrati in precedenza. Allo stesso modo, un diagramma non orientato di Möbius può essere interpretato nel canale trasverso come una interazione tra una D_p -brana ed un O_p -piano, che rappresenta la controparte spazio-temporale del crosscap.

L'introduzione delle D_p -brane diviene ancor più interessante nell'ambito delle superstringhe. Come osservato da Polchinski, infatti, in tale ambito le D_p -brane assumono il ruolo di sorgenti per le cariche nel settore di Ramond. Come oggetti dinamici, le D_p -brane possiedono una tensione (massa per unità di volume). Inoltre, le loro fluttuazioni sono associate alle stringhe

aperte che su di esse terminano. Infine, interagiscono scambiandosi stringhe chiuse. Nel caso della teoria di Tipo I, l'accoppiamento con il settore chiuso coinvolge uno spettro che, ad esempio a massa nulla, oltre al settore gravitazionale (dilatone e gravitone) coinvolge anche un tensore antisimmetrico del settore di Ramond-Ramond. Di conseguenza, le D_p -brane devono avere una carica che consenta loro di “sentire” un accoppiamento con i campi del settore R-R. Tale carica viene detta carica di Ramond-Ramond. Per uno spazio-tempo di dimensione d , è assai naturale che i quanti non siano puntiformi. Si consideri il caso in quattro dimensioni: una particella, 0-brana, è il quanto di un campo di gauge, che è un vettore (una 1-forma), la cui curvatura è un tensore antisimmetrico a due indici (2-forma). Se esistessero monopoli magnetici, essi sarebbero associati, come visto nel capitolo 2, a stati non perturbativi, solitoni, che possiedono una carica conservata che si può identificare con la carica topologica. I quanti della carica magnetica, o topologica, sono associati ad un tensore di curvatura analogo a quello dei quanti “elettrici”, il cosiddetto duale (di Hodge), che in d dimensioni è un tensore antisimmetrico con $d - 2$ indici. Se $d = 4$, anche il tensore duale è un tensore a due indici, indicando che il relativo quanto, il monopolio, è ancora una 0-brana, una particella. In dimensione diversa da 4 non sarebbe più così. Ad esempio, in $d = 10$ il duale sarebbe un tensore antisimmetrico con 8 indici, il cui quanto elementare sarebbe una 6-brana, un oggetto di dimensione 6. Ancor più genericamente: se il quanto elettrico è una p -brana in dimensione d , la curvatura relativa è un tensore con $p + 2$ indici, la curvatura duale è un tensore con $d - (p + 2)$ indici, quindi il quanto duale è una $d - p - 4$ -brana. Ad esempio: in $d = 10$ se il quanto “elettrico” è una 4-brana, essendo $d - p - 4 = 10 - 4 - 4 = 2$, il quanto magnetico è una 2-brana.

La presenza nel vuoto di sorgenti di carica implica necessariamente l'esistenza di oggetti di carica opposta, nel caso specifico gli O -piani, che possano assorbire le linee di Faraday. Una configurazione di vuoto, infatti, deve essere necessariamente neutra. L'ampiezza di anello nella superstringa di Tipo I, grazie all'*aequatio* di Jacobi, è nulla. Nel canale diretto tale risultato è conseguenza della supersimmetria, dovuta ai contributi opposti di bosoni e fermioni. Nel canale trasverso dimostra che la forza che si esercita fra le due brane è nulla (Fig. 5.17). L'attrazione gravitazionale fra le brane è esattamente compensata dalla repulsione dovuta alla carica di R-R. In particolare, nella Tipo I in $d = 10$ l'anello si può interpretare come l'ampiezza fra due D_9 -brane, che occupano tutto lo spazio: un modo elegante di affermare che le corrispondenti stringhe aperte hanno estremi liberi nello spazio-tempo. La condizione di assenza di forza equivale all'affermazione che la tensione della D_9 -brana sia uguale alla corrispondente carica di R-R. Gli oggetti che soddisfano una condizione simile vengono detti stati BPS¹⁸, e godono di importanti proprietà, quali ad esempio quella di essere stati solitonici e quella di preservare metà delle supersimmetrie della teoria originale. La costruzione di orientifold si può riformulare completamente in termini di spazio “target”. Partendo dalla Tipo IIB, che esibisce a bassa energia una teoria con $\mathcal{N} = 2$ supersimmetria nello spazio-tempo dieci dimensionale, la proiezione non orientata chiusa equivale all'introduzione di un O_9 -piano che inevitabilmente produce un vuoto con carica di R-R non nulla. L'introduzione delle D_9 -brane e delle corrispondenti stringhe aperte non orientate diviene necessaria per neutralizzare la carica del vuoto. In particolare, necessitano esattamente 32 D_9 -brane che producono il gruppo di gauge $SO(32)$ a causa dell'antisimmetrizzazione legata all'azione di Ω_0 . Naturalmente il modello è supersimmetrico, quindi la neutralizzazione della carica porta con sé la neutralizzazione della tensione. Inoltre, essa risulta del tutto equivalente alla cancellazione del taadpole do R-R e di conseguen-

¹⁸BPS sta per Bomogol'nyi-Prasad-Sommerfeld, che per primi studiarono soluzioni con queste caratteristiche nell'ambito dei cosiddetti monopoli di 't Hooft- Polyakov.

za dell'anomalia connessa al gruppo di gauge $SO(32)$. La costruzione si estende, immutata nella struttura, a vuoti con configurazioni di D_p -brane e O_p -piani molto più complesse. Va detto che la supersimmetria è fondamentale per assicurare la stabilità dei sistemi. In assenza di supersimmetria, pur neutralizzando la carica di R-R, sopravvive un'attrazione gravitazionale netta che tende a muovere le brane producendo una dinamica che non si è in grado di controllare. La presenza di tadpole di NS-NS, in altri termini, dimostra almeno che il vuoto attorno al quale si sta studiando la teoria non è il vuoto "corretto". La tensione e la carica di R-R di una D_p -brana si possono calcolare confrontando la forza statica di anello. Si ottiene

$$q_p = \frac{1}{(2\pi)^p (\sqrt{\alpha'})^{p+1}}, \quad T_p = \frac{1}{(2\pi)^p (\sqrt{\alpha'})^{p+1}} \frac{1}{g_S}, \quad (5.30)$$

ove q_p è la carica di R-R, T_p è la tensione e g_S è la costante di accoppiamento della stringa¹⁹. Si osservi che la tensione di stringa scala come l'inverso della costante d'accoppiamento. In teoria delle perturbazioni, ove g_S tende a zero, la tensione tende ad essere molto grande, e le D_p -brane ad essere molto "rigide". La dipendenza della tensione da g_S dimostra ancora una volta che le D_p -brane sono stati solitonici (non perturbativi) BPS nelle teorie di stringhe. A conferma di questa interpretazione, tali soluzioni danno luogo a bassa energia a solitoni relative a p -brane nelle corrispondenti supergravità. Sono tuttavia solitoni peculiari, in quanto la loro energia dipende dall'inverso di g_S anzichè dall'inverso di g_S^2 , come i solitoni convenzionali. Per questo, a volte, vengono detti "half-solitons". Le espressioni di carica e tensione soddisfano due proprietà fondamentali, che costituiscono ulteriori verifiche della natura delle D_p -brane. In dieci dimensioni, la duale magnetica di una D_p -brana è una D_{6-p} -brana. Moltiplicando le cariche tra loro e tenendo conto di un riscaldamento che misuri adeguatamente i volumi, si ottiene:

$$(2\pi)^7 (\alpha')^4 q_p q_{6-p} = 2\pi. \quad (5.31)$$

La (5.31) è esattamente la condizione di Dirac di quantizzazione della carica, analoga alla (4.8), soddisfatta per $n = 1$, a dimostrazione che la D_p -brana è il *quanto elementare* per la carica di R-R. Inoltre, le T-dualità cambiano il raggio delle direzioni compatte ma anche la dimensione delle brane corrispondenti. Tuttavia, l'accoppiamento delle brane alle stringhe chiuse deve essere indipendente dalle T-dualità. In altri termini, poichè la costante di Newton deve restare la stessa indipendentemente dalle T-dualità effettuate, tensione e carica delle D_p -brane devono scalare consistentemente. In particolare, la T-dualità inverte il volume delle direzioni compatte, cambiando simultaneamente la costante d'accoppiamento della stringa. Se R è il raggio ed $R' = \alpha'/R$ il raggio T duale, la relazione soddisfatta tra le tensioni nei due casi è

$$2\pi R T_{p+1} = T'_p, \quad (5.32)$$

come è facile verificare.

Per concludere questo brevissimo excursus sulle D_p -brane in relazione con le stringhe aperte, vale la pena di accennare ad una delle scoperte più interessanti della fisica teorica degli ultimi dieci anni, legata di nuovo, in ultima analisi, alla stretta quanto peculiare e sorprendente relazione fra stringhe aperte e chiuse. Si tratta della celebrata e celeberrima "congettura

¹⁹Anche se può sembrare strano, la costante di accoppiamento di stringa, che conta il numero di vertici nei diagrammi, è data dall'esponenziale del vev del dilatone, di nuovo un modulo. Il dilatone tende a "cadere" esponenzialmente verso l'infinito negativo, quindi g_S tende a divenire nulla. Deve dunque esistere un meccanismo che stabilizzi il dilatone ad un vev finito.

di Maldacena”, oggi universalmente nota come corrispondenza AdS/CFT o corrispondenza gauge/gravity. Sia nella descrizione della QCD che nell’ambito dei modelli duali è emersa chiaramente l’idea che la teoria quantistica dei campi sia descrivibile in termini di una teoria di stringhe, almeno in opportuni regimi quali quello della QCD non perturbativa. La congettura di Maldacena rende esplicita tale corrispondenza. Una possibile descrizione “di stringa” delle teorie di gauge è stata già illustrata: la teoria nel volume di universo di uno stack di N D_p -brane descrive i gradi di libertà di una teoria di gauge non-abeliana con gruppo di gauge $U(N)$, a patto di trascurare o disaccoppiare i gradi di libertà ortogonali alle D_p -brane e le fluttuazioni massive. La presenza delle D_p -brane, che come visto possiedono una massa per unità di volume ed una carica, muta di conseguenza la geometria dello spazio-tempo. Dall’analisi di questi due aspetti si pu’ comprendere la corrispondenza.

Si consideri, in particolare, uno stack di N D_3 -brane sovrapposte in dieci dimensioni. È possibile determinare accuratamente un limite di bassa energia in cui sopravvive soltanto la corrispondente teoria di gauge, ovvero la riduzione dimensionale della teoria con $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills con gruppo $SU(N)$ in dieci dimensioni, che diviene la teoria con $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con gruppo $SU(N)$ in quattro dimensioni. Il resto delle fluttuazioni si disaccoppia, fatta eccezione per i modi a massa nulla nel settore chiuso, gravitoni dieci-dimensionali, che non interagiscono con il settore di gauge. D’altra parte, si può calcolare la metrica risultante dalla presenza delle N D_3 -brane sovrapposte immerse nello spazio piatto. Si ottiene una sorta di generalizzazione multidimensionale di un buco nero, una geometria che possiede un orizzonte degli eventi con la topologia di una sfera in cinque dimensioni. Il limite equivalente a quello di bassa energia precedente si ottiene esaminando il regime cosiddetto “vicino all’orizzonte”. In tale limite di nuovo sopravvivono dei gravitoni dieci-dimensionali disaccoppiati da un settore in cui la metrica degenera a quella di uno spazio $AdS_5 \times S^5$. S^5 è la sfera in cinque dimensioni, la geometria già menzionata per l’orizzonte. AdS_5 invece è lo spazio di Anti-de-Sitter in cinque dimensioni, una varietà 5-dimensionale a curvatura costante negativa, un iperboloide. Il modo più semplice di descriverlo è, come al solito, immergerlo in uno spazio 6-dimensionale la cui metrica sia

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_5^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 - dX_4^2 \quad . \quad (5.33)$$

In tale spazio, si consideri l’iperboloide definito dall’equazione

$$X_0^2 + X_5^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = R^2 \quad , \quad (5.34)$$

e si ridefiniscano le variabili come segue, in modo che soddisfino l’equazione dell’iperboloide:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2u} [1 + u^2(R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2)] \ , \\ X_1 &= uRx_1 \ , \\ X_2 &= uRx_2 \ , \\ X_3 &= uRx_3 \ , \\ X_4 &= \frac{1}{2u} [1 + u^2(-R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2)] \ , \\ X_5 &= uRt. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Differenziando e sostituendo nella metrica si verifica immediatamente che

$$ds^2 = R^2 u^2 \left(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \right) - R^2 \frac{du^2}{u^2} \quad . \quad (5.36)$$

Ridefinendo ancora la scala $u = r/R^2$ si ottiene infine la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left(dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \right) - \frac{R^2}{r^2} dr^2 \quad , \quad (5.37)$$

dalla quale si può osservare che il bordo di AdS_5 , situato ad r infinito, è lo spazio-tempo quadridimensionale di Minkowski, mentre l'orizzonte si trova ad r nullo. Si osservi che per come è stato costruito, lo spazio AdS_5 ammette come isometrie (trasformazioni generali di coordinate che non cambiano la metrica) manifeste le rotazioni indipendenti delle coordinate spaziali e delle due “temporali” X_0 e X_5 , ossia trasformazioni nel gruppo $SO(4, 2)$.

Il confronto tra i due limiti “fattorizzati” consente di rendere plausibile la seguente congettura (di Maldacena): sussiste una completa equivalenza tra la teoria $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con gruppo $SU(N)$ in $d = 4$ sullo spazio di Minkowski pensato come il bordo di AdS_5 , e la superstringa di Tipo IIB in dieci dimensioni compattificata su $AdS_5 \times S^5$. È evidente la profondità della congettura: si afferma che una teoria quantistica di oggetti estesi, che in principio contiene infiniti campi, sia equivalente ad una teoria di campo in apparenza molto più semplice. La congettura viene anche detta AdS/CFT in virtù del fatto che la teoria di campo coinvolta è invariante conforme, vale a dire è finita nell'ultravioletto e possiede una funzione beta (Cap. 2) identicamente nulla. In particolare, la costante d'accoppiamento “vera” di una siffatta teoria deve essere indipendente dalla scala, ed infatti risulta essere $\lambda = g_{YM}^2 N$ (anche detta costante d'accoppiamento di 't Hooft). La dualità consiste nel pensare che le due teorie siano descrizioni in regimi diversi della stessa fisica. Esiste dunque un ben preciso dizionario che consente di “tradurre” il significato delle quantità fisica di una descrizione in quello dell'altra. Il rango del gruppo N pari al numero di colori nella $\mathcal{N} = 4$ corrisponde al flusso (quantizzato: conta il numero delle D_3 -brane dentro l'orizzonte) attraverso S^5 della 5-forma di Ramond-Ramond, elemento dello spettro della Tipo IIB. La costante d'accoppiamento della stringa è legata alla costante d'accoppiamento della $\mathcal{N} = 4$ attraverso la relazione $g_{YM}^2 = 4\pi g_S^{20}$. Usando inoltre l'espressione per la tensione delle D_3 -brane, è possibile stabilire che λ sia proporzionale alla dimensione R , comune ad AdS_5 e ad S_5 , mostrando che il limite di accoppiamento forte della teoria $\mathcal{N} = 4$ corrisponde a raggio piccolo, ovvero curvatura grande e quindi accoppiamento forte nel “lato” della superstringa. Una verifica ulteriore e spettacolare riguarda le simmetrie presenti nei due “lati” della congettura. $AdS_5 \times S^5$ ammette un gruppo di isometrie che è il prodotto di $SO(4, 2)$, come visto, per AdS_5 e di $SO(6)$, il gruppo naturale di isometrie della 5-sfera. Qual'è l'interpretazione dalla parte della $\mathcal{N} = 4$? Per quanto riguarda $SO(4, 2)$, esso coincide esattamente col gruppo conforme in quattro dimensioni²¹. Inoltre, il gruppo $SO(6)$ è isomorfo al gruppo $SU(4)$, che è il gruppo di R -simmetria della teoria $\mathcal{N} = 4$, il gruppo che ruota fra loro i quattro generatori della supersimmetria.

Per “verificare” più a fondo la corrispondenza occorrerebbe calcolare delle quantità nelle due teorie e dimostrare che coincidano. La questione non è di facile soluzione: da un lato non si sa quantizzare la stringa su una varietà così complicata come $AdS_5 \times S^5$, quindi occorre un limite di piccola curvatura per usare la supergravità a bassa energia. Dall'altro, la teoria dei campi è difficile da studiare nel regime di accoppiamento forte, che corrisponde, come visto, al regime di supergravità. Per verificare la congettura, occorre trovare delle quantità che si possano calcolare in teoria delle perturbazioni e restino le stesse nel regime non-perturbativo.

²⁰Come visto, g_S è legata al vev del dilatone. È fondamentale in questo contesto che il dilatone sia costante, come dimostrato dalla soluzione di supergravità legata alle D_3 -brane.

²¹Per uno spazio di Minkowski $SO(p, q)$, il gruppo conforme è $SO(p + 1, q + 1)$.

La possibilità che esistano tali quantità “protette” è legata al grado elevato di supersimmetria della $\mathcal{N} = 4$ ed al fatto che sia una teoria invariante conforme. La congettura è stata verificata per molte di queste quantità, ed è stata anche estesa a situazioni con meno supersimmetria. La speranza ultima sarebbe quella di avere una descrizione di stringa della QCD, che è una teoria non supersimmetrica.

Per concludere, vale la pena di osservare che la congettura di Maldacena fornisce un esempio del *Principio Olografico*, introdotto per la prima volta da G. 't Hooft e da L. Susskind negli anni '90. Secondo gli autori, una teoria della gravità in d dimensioni dovrebbe essere completamente descrivibile in termini di una teoria di natura diversa, in dimensione inferiore. L'esempio ovvio è il buco nero: un osservatore esterno rileva che il numero di gradi di libertà entro il volume dell'orizzonte è in realtà legato all'area dell'orizzonte piuttosto che al volume. La dualità AdS/CFT è della stessa natura: essa correla una descrizione dei gradi di libertà entro AdS_5 a quella sul “bordo” di AdS_5 che, come osservato, è lo spazio-tempo minkowskiano in $d = 4$. Questo è possibile perchè la “quinta” coordinata, quella radiale nell'iperboloide, è essenzialmente legata alla scala di energia della teoria di gauge che vive sul bordo, che come detto è invariante rispetto a questa scala. La corrispondenza fra teorie di gauge e gravità è un altro esempio sorprendente della profondità delle relazioni e dei concetti nascosti all'interno della formulazione delle teorie di superstringhe e più in generale della teoria M.

5.4 Teoria M

Nel precedente paragrafo è emerso in modo inequivocabile che la descrizione perturbativa delle superstringhe pur catturando alcuni aspetti interessanti legati soprattutto agli spettri dei modi di oscillazione delle varie teorie, non è sufficiente a caratterizzare tutte le strutture presenti in ciascuna teoria. In particolare, le D_p -brane sono esempi di stati solitonici la cui tensione dipende dall'inverso della costante d'accoppiamento di stringa rendendoli invisibili in teoria delle perturbazioni. Esistono delle altre soluzioni, deducibili ad esempio dalle supergravità limite, la cui energia scala come l'inverso del quadrato della costante d'accoppiamento di stringa, esattamente come per i tradizionali solitoni della teoria dei campi. Anch'essi sono associati a p -brane ed accoppiati ad opportuni tensori antisimmetrici. Una p -brana si accoppia con carica “elettrica” (quindi come la particella al campo elettromagnetico) ad una $p + 1$ -forma, e con carica “magnetica” (quindi come un monopolo al campo elettromagnetico) alla forma duale, che in 10 dimensioni è una $7 - p$ forma, la cui brana elettrica è dunque una $6 - p$ brana. Così come le D_p -brane si accoppiano alle forme del settore di R-R, le p -brane si accoppiano alle forme di NS-NS. Ad esempio, il tensore antisimmetrico del settore universale è accoppiato ad una 1-brana che è la stringa stessa, per questo detta stringa fondamentale ed indicata come F1. La sua duale è una 5-brana, nota come Neveu-Schwarz 5-brana, $NS5$. È interessante descrivere il contenuto di brane delle cinque teorie in dieci dimensioni, riportato in tabella 5.1. La teoria di Tipo IIB contiene una stringa fondamentale associata al tensore antisimmetrico B_2 , e la sua duale, $NS5$, associata al B_6 ²² nel settore di NS-NS, mentre nel settore di Ramond sono presenti le forme di grado 0, 2 e 4, che corrispondono alle D -brane $D_{(-1)}$ ²³, $D1$, $D3$, $D5$ e $D7$. La Tipo IIA, oltre al settore universale che contempla al solito la F1 e la $NS5$, esibisce D_0 , $D2$, $D4$, $D6$

²²Si osservi che la B_6 non compare esplicitamente nello spettro perturbativo della IIB, ma la sua presenza è assicurata dall'accoppiamento elettrico della duale B_2 .

²³La $D_{(-1)}$ -brana ha condizioni di Dirichlet anche nella direzione tempo: è un istantone.

Teoria	Brane	Forme
Tipo IIB	$F1, NS5$ $D_{(-1)}, D1, D3, D5, D7$	B_2, B_6 C_0, C_2, C_4, C_6, C_8
Tipo IIA	$F1, NS5$ $D_0, D2, D4, D6, D8$	B_2, B_6 C_1, C_3, C_5, C_7
Tipo I	$D1, D5, D9$	C_2, C_6
Eterotica	$F1, NS5$	B_2, B_6

Tabella 5.1: Forme e Brane nelle superstringhe 10-dimensionali.

e $D8$ -brane legate alle forme dispari del settore R-R. Si osservi che il contenuto di D_p -brane delle due teorie combacia perfettamente con l'azione delle T-dualità. Nel paragrafo precedente si era detto che la T-dualità mappa la Tipo IIB su un cerchio di raggio R nella Tipo IIA su un cerchio di raggio α'/R . Inoltre, la T-dualità effettuata lungo una direzione ortogonale trasforma una D_p -brana in una $D_{(p+1)}$ -brana. In tal caso la D_p -brana slacciata si allaccia lungo la direzione aggiuntiva. La T-dualità trasforma la D_p -brana in una $D_{(p-1)}$ -brana se effettuata lungo una direzione longitudinale. In tal caso la D_p -brana allacciata si trasforma in una $D_{(p-1)}$ -brana slacciata lungo la direzione in questione. Tali azioni sono esattamente compatibili con D_p -brane con p pari nella Tipo IIA e con D_p -brane con p dispari nella Tipo IIB.

La teoria di Tipo I contiene, oltre alle D_9 -brane che corrispondono alle stringhe aperte con estremi liberi ovvero con condizioni di Neumann, le D_1 e D_5 che sopravvivono, dalla Tipo IIB, alla proiezione non-orientata. In particolare, la proiezione Ω_c proietta via la due forma NS-NS, quindi la $F1$ e la duale. La Ω_o invece proietta via le D_3 e le D_7 -brane. L'eterotica, infine, non possiede un settore di Ramond-Ramond, quindi non contiene D_p -brane. Le uniche eccitazioni non-perturbative sono legate al settore universale che fornisce, al solito, $F1$ e $NS5$.

La presenza di eccitazioni non banali negli spettri non-perturbativi delle superstringhe fa emergere una questione fondamentale: cosa accade alle teorie di superstringhe nel regime di accoppiamento forte? Per rispondere alla domanda, in assenza delle soluzioni complete non perturbative che ovviamente non si sanno determinare, occorre trovare delle quantità che possano essere confrontate nei diversi regimi. Tali quantità sono gli stati BPS nell'approssimazione di supergravità. Infatti, essi hanno carica quantizzata e sono insensibili alle correzioni in α' , quindi mantengono le loro proprietà anche in regime di accoppiamento forte. In altri termini, gli stati BPS, perturbativi e non, vanno considerati tutti sullo stesso piano (democrazia delle p -brane).

Guardando agli spettri BPS, si può affermare in alcuni casi che in regime di accoppiamento forte alcune teorie di superstringhe diventano *altre* teorie di superstringhe, ad esse "duali".

Per la precisione, si può congetturare che esista un'unica teoria fondamentale, detta teoria M. Essa è descritta perturbativamente, in regimi diversi, da gradi di libertà diversi corrispondenti ad alcuni degli oggetti coinvolti. Muovendosi nello spazio dei parametri (lo “spazio dei moduli”) della teoria M, ci si imbatte in alcuni regimi in cui gli stati perturbativi corrispondono esattamente a quelli delle teorie di superstringhe.

La teoria M è definita in $d = 11$, ed il suo limite di bassa energia è la supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 11$, a cui non corrisponde alcuna teoria di superstringhe nel completamento ultravioletto. La supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 11$ contiene il gravitone G_{MN} , il gravitino ψ_M ed una tre forma A_{MNP} . Compattificandola su un cerchio, essa dà luogo alla supergravità di Tipo IIA. Infatti considerando i campi risultanti ponendo X^{10} su un cerchio, si ottiene il gravitone $G_{\mu\nu}$, il vettore $G_{\mu,10}$, lo scalare $G_{10,10}$, due gravitini di opposta chiralità ψ_μ^i , due spinori ψ_{10}^i , la tre forma $A_{\mu\nu\rho}$ e la due forma $A_{\mu\nu,10}$, esattamente il contenuto di campi della supergravità di tipo IIA. Se il raggio del cerchio diviene molto grande, si torna alla teoria completa in $d = 11$, se il raggio del cerchio è piccolo si “confina” la teoria in $d = 10$. Ma cos'è, realmente, il raggio del cerchio, in unità fisiche? E. Witten, nel 1995, ebbe la grande intuizione di capire che il raggio del cerchio fosse legato direttamente alla costante d'accoppiamento di stringa. In particolare, guardando le azioni effettive delle due supergravità, si può dedurre che

$$R_{10} = g_S^{\frac{2}{3}} \ell_{Planck} \quad , \quad (5.38)$$

ove ℓ_{Planck} , a sua volta, è legata alla scala di stringa da $\ell_{Planck} = g_S^{1/3} \sqrt{\alpha'}$. Ecco quindi che nel regime perturbativo (g_s piccolo) la stringa “sente” soltanto le 10 dimensioni della Tipo IIA. In più, al crescere della costante d'accoppiamento una nuova dimensione si dischiude, dando luogo alla teoria 11-dimensionale. Di essa è noto che il limite di bassa energia coincide con la supergravità $\mathcal{N} = 1$ in $d = 11$, e che contiene 2-brane e 5-brane ($M2$ ed $M5$), come testimoniato dalla presenza della 3-forma. Ancora, le D_0 -brane sono le eccitazioni di Kaluza-Klein della compattificazione sul cerchio, come si può dedurre dalla loro tensione pari a $T_0 = g_s/\sqrt{\alpha'}$. Tutte le restanti brane della Tipo IIA si possono interpretare in termini di $M2$ ed $M5$: $M2$ su un cerchio ortogonale a X^{10} produce D_2 , $M2$ su X^{10} produce $F1$, $M5$ su X^{10} produce D_4 .

In sostanza, tutte le teorie di (super)stringhe²⁴ sono connesse fra loro e connesse alla teoria M, come mostrato in figura 5.18. La IIB è legata alla IIA da T-dualità dopo compattificazione su un cerchio. D'altra parte, la Tipo I $SO(32)$ è legata alla Tipo IIB dalla costruzione di orientifold, quindi dalla proiezione di “world-sheet parity” Ω . Altra relazione menzionata è quella tra HE ed HO, che sono T-duali, a meno dell'introduzione di opportune linee di Wilson. Assai interessante è la relazione tra la Tipo I $SO(32)$ e la HO. Compattificando entrambe su un cerchio di raggio R , possiedono a massa nulla gli stati della supergravità in 9 dimensioni, con un identico gruppo di gauge. Si può dedurre, ad esempio guardando le azioni effettive di bassa energia, che il dilatone compare in maniera opposta a causa della presenza delle stringhe aperte nella Tipo I, mentre sole stringhe chiuse compongono la HO. Un opposto dilatone, $\phi_I = -\phi_H$, si traduce nell'inversione delle rispettive costanti d'accoppiamento, $g_S^I = 1/g_S^{HO}$. La corrispondenza viene detta S -dualità, ed è una relazione che associa alla HO nel regime di accoppiamento debole la Tipo I in regime di accoppiamento forte e viceversa. La HO deve allora figurare tra gli stati non perturbativi della Tipo I. Infatti, la D_1 della Tipo I può essere identificata con la $F1$ dell'HO, la stringa eterotica è la D -stringa della Tipo I! L'ultima relazione

²⁴Restano da collegare in modo convincente la stringa bosonica ed altri esempi bosonici in dieci dimensioni noti come Tipo 0.

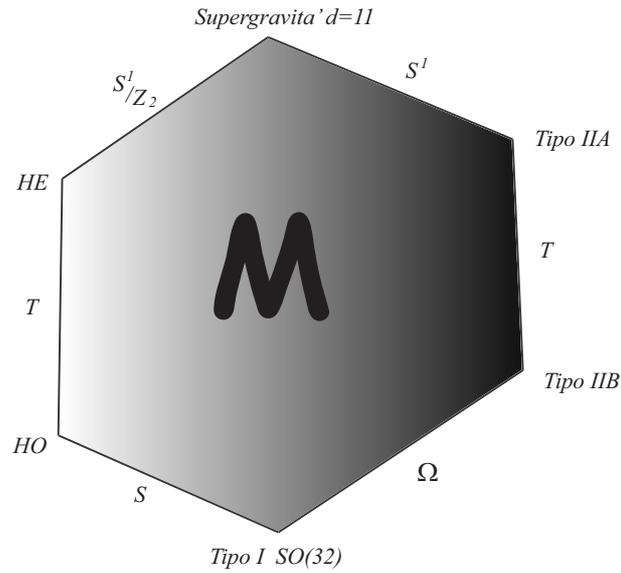


Figura 5.18: Dualità di stringa e teoria M.

da determinare è quella fra la teoria M e la HE. In un lavoro fondamentale, P. Horava e E. Witten hanno mostrato che la HE si ottiene attraverso una compattificazione molto suggestiva della teoria M su un segmento. Se in un cerchio di raggio R si identificano punti secondo la relazione $x \sim -x$, poichè $-x \sim (2\pi R - x)$ (Fig. 5.19), il quoziente equivale ad un segmento, in cui l'origine ed il punto medio πR sono fissi rispetto all'identificazione²⁵. Il quoziente agisce anche sui campi. La tre forma, in particolare, essendo dispari, viene proiettata via. Inoltre, i campi di gauge sono confinati a giacere sulle due D_9 -brane ortogonali al segmento, identificato come la coordinata compatta nella direzione 10. Le D_9 -brane sono quindi una sorta di "muri" posti ai confini dell'Universo. La cancellazione di anomalie forza i campi di gauge ad appartenere al gruppo E_8 su ciascuna brana, riproducendo completamente lo spettro a massa nulla della HE.

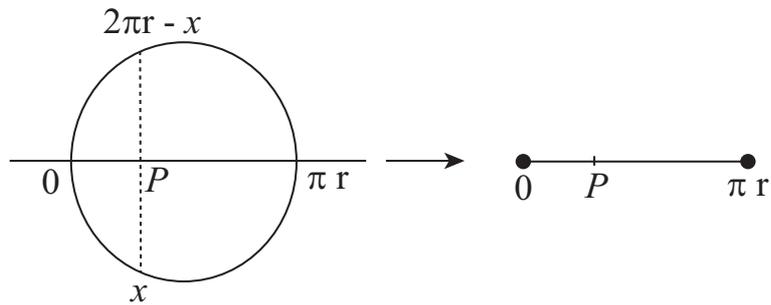


Figura 5.19: L'orbifold S^1/Z_2 .

²⁵Tale segmento si indica a volte con S^1/Z_2 e viene detto "orbifold Z_2 ", essendo il quoziente del cerchio per l'azione Z_2 di inversione spaziale.

La rete delle dualità di stringa è ovviamente molto vasta, numerose altre relazioni si possono determinare a partire dalle dualità congetturate in dimensione dieci ed undici. Lo schema di teoria M da un lato risulta assai soddisfacente, fornendo una reale unificazione di tutte le teorie di superstringhe che potrebbe somigliare alla “teoria finale” cercata. D’altro canto, i gradi di libertà fondamentali della teoria M sono ancora ignoti, e la vastità dello spazio dei moduli rende lo schema non predittivo. Una gran parte delle scelte dei parametri, producendo regimi di accoppiamento forte in ogni modello, risulta inaccessibile in assenza di una soluzione esatta della teoria.

5.5 Scenari

Il contesto concettuale offerto dalla teoria M consente di intravedere la possibile “teoria finale”. Tuttavia, per poter essere considerata nel novero delle teorie fisiche, la teoria M deve passare al vaglio delle verifiche “sperimentali”. In questo paragrafo, verranno brevemente illustrati i possibili scenari dettati dalle superstringhe e dalla teoria M riguardo la fisica in quattro dimensioni, in particolare la fisica oltre il MS.

Partendo da modelli in dieci od undici dimensioni e cercando di estrarre una teoria “effettiva” in quattro dimensioni, occorre controllare un cospicuo numero di parametri rilevanti. Come visto nei paragrafi precedenti, la teoria M non ha, in linea di principio, parametri liberi. Tuttavia, negli angoli relativi alle superstringhe vanno prese in considerazione almeno la scala di stringa, M_S e la costante d’accoppiamento di stringa g_S . Quest’ultima, essendo legata al vev del dilatone, ha un valore non fissato. Altre scale che entrano in gioco nella definizione della teoria in quattro dimensioni sono certamente il volume della varietà su cui la stringa o la teoria M è compattificata, la scala di Planck e la scala elettrodebole, l’eventuale scala GUT e l’ordine di grandezza dell’accoppiamento di gauge. I parametri provenienti “direttamente” dalla teoria fondamentale sembrano tutti indipendenti. Tuttavia qualche informazione deve essere estratta dalla conoscenza delle teorie di campo che costituiscono il “limite puntiforme” dell’eventuale teoria fondamentale.

Un primo scenario interessante è legato alla fisica quadridimensionale che emerge dalla teoria HE. Nelle superstringhe chiuse i gradi di libertà di gauge e gravitazionali emergono dallo stesso settore. Analizzando la teoria effettiva, si possono dedurre, da considerazioni elementari puramente dimensionali, delle relazioni fra le varie scale. Ad esempio, in dieci dimensioni la costante d’accoppiamento gravitazionale e la costante d’accoppiamento di gauge sono legate ai parametri di stringa dalle relazioni

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 &= g_{HE}^2 (\alpha')^4 = g_{HE}^2 M_{HE}^{-8} \quad , \\ g_{10}^2 &= g_{HE}^2 (\alpha')^3 = g_{HE}^2 M_{HE}^{-6} \end{aligned} \quad (5.39)$$

ove g_{HE} è la costante d’accoppiamento di stringa e M_{HE} la scala di stringa. In quattro dimensioni, rozzamente parlando, si deve includere il volume di compattificazione V_6 , con

$$\kappa_{10}^2 = \kappa_4^2 V_6; \quad ; \quad g_{10}^2 = g_4^2 V_6 \quad . \quad (5.40)$$

Osservando che la scala di Planck M_P è essenzialmente legata all’inverso di κ_4 , si ottiene immediatamente che

$$M_{HE} = g_4 M_P \quad . \quad (5.41)$$

Inoltre, usando le eq. (5.39), si può ricavare la relazione

$$g_{HE} = g_4^2 M_P^3 \sqrt{V_6} \quad . \quad (5.42)$$

Di conseguenza, dalla (5.41) risulta che la scala di stringa, nel caso dell'Eterotica (HE o HO), è legata necessariamente alla scala di Planck, essendo g_4 la costante d'accoppiamento di gauge, che alla scala GUT può essere scelta dell'ordine di $g_4 \sim 0.1$. Dall'equazione (5.42), inoltre, risulta chiaro che se la scala di compattificazione è alla scala GUT, quindi $V_6 \sim M_{GUT}^{-1/2}$, la costante d'accoppiamento di stringa deve essere assai grande affinché M_{GUT} possa coincidere con quella relativa al MSSM. In altri termini, la descrizione del MSSM nell'ambito dell'HE non può essere legata allo sviluppo perturbativo. In ogni caso, la scala M_{HE} risulta almeno un fattore 20 più grande della scala GUT del MSSM, ed un fattore $10 - 10^2$ più piccola della scala di Planck. Nello scenario conseguente, di solito indicato come "Heterotic-Susy-GUT", si immagina dunque il MSSM fino alla scala M_{GUT} , e poi una teoria GUT fino alla scala della gravità, che può essere la scala di Planck o M_{HE} . Vi sono molti modi diversi di ottenere la scala di Planck dalla scala GUT e molti possibili diversi scenari. A tal proposito, un esempio da citare è quello relativo alle cosiddette "correzioni di soglia degli stati pesanti". Per riconciliare la scala di Planck con la scala di stringa si includono tutti gli stati massivi della stringa nel "running" delle costanti d'accoppiamento.

Lo scenario risultante, in ogni caso, non deve passare necessariamente per una fase di scala GUT, anche se le costanti d'accoppiamento sono certamente unificate per il fatto che tutte sono legate a g_{HE} e devono certamente coincidere alla scala di stringa! Del resto, le superstringhe sono teorie finite, quindi il running delle costanti d'accoppiamento coinvolge esclusivamente la teoria effettiva. Il cammino più popolare passa per la rottura, su un Calabi-Yau, del gruppo $E_8 \times E_8$ ad $E_8 \times E_6$ attraverso il cosiddetto "standard embedding"²⁶, in cui E_6 è il gruppo GUT ed E_8 quello nascosto. Genericamente, esistono modelli con gruppi anche direttamente coincidenti col gruppo del MS. Il numero di generazioni è tipicamente legato a "numeri topologici" della varietà compatta (ad esempio, in un caso famoso noto come la "quintica in \mathbf{CP}^4 ", il numero netto di generazioni è 100, non proprio vicino a 3!). Due ulteriori osservazioni sono generiche ed interessanti: anzitutto in queste teorie compaiono facilmente stati bosonici a massa nulla non protetti da simmetrie. Si tratta di stati accidentali che derivano dalla riduzione sulla varietà compatta a causa di simmetrie discrete che servono a ridurre le supersimmetrie ad una o a nessuna. Secondo, non esistono in teorie di superstringhe delle simmetrie globali conservate. Esse diventano tutte necessariamente simmetrie di gauge.

Lo scenario derivante dall'eterotica è di tipo assai "convenzionale" se confrontato con i modelli di teoria dei campi. Molto diverso il discorso per le superstringhe di Tipo I, gli orientifold, che sono assai meno vincolati e quindi danno luogo ad una enorme varietà di possibili scenari. Il motivo fondamentale è la contemporanea presenza di un settore di stringa chiusa (il "bulk") che determina le interazioni gravitazionali, ed un settore di stringa aperta, il settore delle D_p -brane, al quale appartengono le interazioni di gauge. Nelle Tipo I, come visto, possono essere presenti D_9 , D_5 e D_1 , ma effettuando delle T-dualità in realtà si possono introdurre D_p -brane con p generico. Lo scenario che si immagina è quello cosiddetto di "Brane World"²⁷: L'Universo è 10 o 11 dimensionale, ma le interazioni di gauge sono confinate su una varietà

²⁶Si intende che la connessione relativa al gruppo di gauge sia coincidente con la "connessione di spin" della supergravità.

²⁷L'idea è stata introdotta alla fine degli anni '90 da I. Antoniadis, N. Arkani-Ahmed, S. Dimopoulos e G. Dvali.

p -dimensionale, una D_p -brana (Fig. 5.20). L'interazione gravitazionale, d'altro canto, invade tutte le dimensioni del bulk e per questo motivo risulta estremamente più debole rispetto alle altre interazioni. È possibile ripetere l'analisi sulle scale coinvolte anche in tal caso. I campi

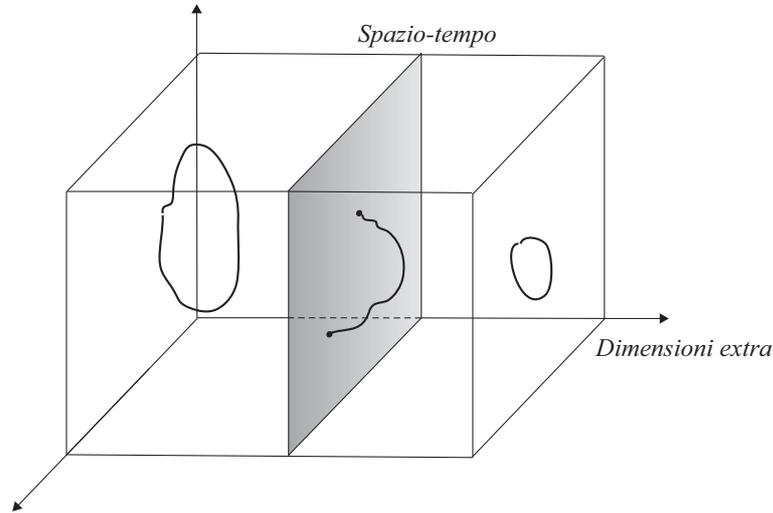


Figura 5.20: Il “brane-world.”

di gauge si propagano sulla D_p -brana, quindi $p - 3$ direzioni sulla brana sono compatte e 4 corrispondono allo spazio-tempo (quindi si sta assumendo $p \geq 3$). Con V_{\parallel} viene indicato il volume relativo alle $p - 3$ direzioni compatte longitudinali mentre con V_{\perp} il volume delle $9 - p$ direzioni compatte ortogonali alla brana. La relazione tra le costanti d'accoppiamento ed i parametri di stringa in tal caso risulta

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 &= g_I^2 (\alpha')^4 = g_I^2 M_I^{-8} \quad , \\ g_{10}^2 &= g_I (\alpha')^{(p-3)/2} = g_I M_I^{p-3} \quad , \end{aligned} \quad (5.43)$$

ove il diverso peso della costante d'accoppiamento di stringa g_I entro le costanti gravitazionale e di gauge è dovuto alla diversa caratteristica di Eulero dei diagrammi ad albero di stringa chiusa (la sfera) e di stringa aperta (il disco). Il legame con le quantità quadridimensionali

$$\kappa_{10}^2 = \kappa_4^2 V_{\perp} V_{\parallel}; \quad ; \quad g_{10}^2 = g_4^2 V_{\parallel} \quad , \quad (5.44)$$

dimostra che in tal caso la scala di stringa non è necessariamente legata alla scala di Planck. Si ricava infatti la relazione

$$g_I = g_4^2 V_{\parallel} M_I^{p-3} \quad , \quad (5.45)$$

in cui è evidente che la scala di stringa può essere resa piccola a piacere abbassando la costante d'accoppiamento di stringa, che è un parametro arbitrario, e viceversa una scala di stringa piccola consentirebbe una trattazione puramente perturbativa. D'altra parte, la gerarchia legata alla scala di Planck è contenuta nella relazione

$$M_P^2 = \frac{V_{\perp}}{V_{\parallel}} \frac{M_I^{14-2p}}{g_4^4} \quad , \quad (5.46)$$

da cui è evidente che anche un basso valore di M_I potrebbe risultare compatibile con la scala di Planck, a condizione di elevare il volume delle dimensioni trasverse. Ovviamente, per capire di quanto si può abbassare M_I occorre stabilire quali siano i limiti sulle altre grandezze. Per quel che riguarda V_{\parallel} , il limite è posto dai campi che vivono sulla brana, i campi di gauge. Le extra dimensioni produrrebbero delle eccitazioni di Kaluza-Klein per i campi del MS. Limiti sperimentali da LEP dimostrano che la scala del volume longitudinale dovrebbe essere non inferiore almeno a 5 TeV, quindi extra-dimensioni piccole. Ben diverso il discorso per V_{\perp} . Le sole interazioni gravitazionali sarebbero sensibili a queste extra-dimensioni. La loro presenza cambierebbe la legge di Newton dell'inverso del quadrato della distanza. Tuttavia, assai sorprendentemente, gli attuali limiti sperimentali sarebbero compatibili con extra dimensioni appena inferiori al cm! Si può dunque abbassare M_I mantenendo la scala di Planck a spese di dimensioni extra ortogonali compatte ma GRANDI! Ad esempio, si supponga che la scala M_I sia dell'ordine del TeV, in modo che i modi di Kaluza-Klein delle stringhe aperte si possano vedere ad LHC. Si immagini che vi siano n dimensioni grandi, in modo che $V_{\perp} = R^n$, con R la dimensione. Se $n = 1$, si ottiene $R = 8 \text{ Km}$, chiaramente escluso dagli esperimenti. Ma già un $n = 2$ darebbe un R inferiore al millimetro, perfettamente compatibile con i limiti sperimentali! Le extra dimensioni grandi e la scala di stringa al TeV dipingono uno scenario molto diverso dalla tradizionale ipotesi del deserto. Ad esempio, l'unificazione delle costanti d'accoppiamento sarebbe assai più rapida, con un running a potenza, ed il problema della gerarchia sarebbe trasferito nella gerarchia tra le dimensioni compatte "piccole" e quelle alla scala del millimetro.

Nell'ambito delle teorie di Tipo I, esistono due approcci possibili per tentare di costruire modelli realistici. Uno consiste nel cercare spazi compatti opportuni partendo dalla teoria di stringa (top-down approach). Si cercano opportune soluzioni in quattro dimensioni che soddisfino tutti i vincoli di cancellazione dei tadpoles. Per ottenere modelli con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria in $d = 4$ e fermioni chirali, si devono introdurre compattificazioni in cui le D_p -brane coinvolte siedano su singolarità opportune della varietà (i punti fissi degli orbifolds, ad esempio), ovvero si devono considerare settori con configurazioni complicate di D_p -brane che si intersechino ad angoli non banali. Si parla in tal caso di "intersecting brane worlds". Tipicamente si ottengono modelli che contengono lo spettro del MS, insieme tuttavia a molti altri campi che a bassa energia non si vedono. Si devono utilizzare dei meccanismi che possano giustificare la soppressione dei processi che coinvolgano i campi aggiuntivi. Una seconda possibilità è quella di realizzare il MS localmente, su degli stacks di brane, e cercare poi di trovare dei veri "vuoti di stringa" che possano rappresentare il completamento degli stack che riproducono il MS (bottom-up approach). Ad esempio, tre stack di D_3 -brane che si intersecano, rispettivamente con 3, 2 e 1 brane, contengono vettori di gauge del gruppo $U(3) \times U(2) \times U(1)$. Scegliendo una configurazione opportuna ed osservando che $U(N) = SU(N) \times U(1)$, si possono separare gli $U(1)$ dentro i gruppi non abeliani ottenendo il gruppo del MS, ed inoltre si possono intersecare le brane in modo da ottenere nelle intersezioni i numeri quantici delle particelle di materia. Ovviamente non è sufficiente riprodurre i bosoni di gauge ed i campi di materia per ottenere una teoria plausibile, occorre anche immergerla opportunamente in un modello di stringa ed inoltre controllare la dinamica e la stabilità dei modelli ottenuti.

Per concludere, vale la pena di menzionare un'ulteriore possibilità, esplorata negli ultimi anni, anch'essa abbastanza "naturale" nell'ambito delle teorie di superstringhe. Si immagini che una delle sei dimensioni interne, anzichè essere compatta, sia in realtà una dimensione infinitamente estesa, ad esempio ortogonale alla D_3 -brana che contiene il nostro universo. Tale scenario di "brane-world" sembra non realistico perchè la gravità percepita dall'osservatore localizzato

nelle quattro dimensioni non seguirebbe la legge dell'inverso del quadrato della distanza. Verso la fine degli anni '90 L. Randall e R. Sundrum mostrarono che in realtà la deviazione dalla legge di Newton sussiste a causa della scelta fattorizzata per la metrica dello spazio-tempo. Se si immagina invece una metrica cosiddetta "warped", allora è possibile in qualche modo "localizzare" la gravità sulla sottovarietà 4-dimensionale pur in presenza di ulteriori dimensioni estese. Ad esempio, si consideri una metrica in uno spazio 5-dimensionale (dimenticando per un momento le restanti cinque dimensioni compatte) della forma

$$ds^2 = f(x_5) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dx_5^2 \quad . \quad (5.47)$$

La funzione $f(x_5)$ in (5.47) è detta "warp factor" e la metrica, appunto, "warped". La presenza del warp factor può cambiare drammaticamente la geometria dello spazio-tempo. Se, ad esempio, la $f(x_5)$ è un esponenziale che decresce al crescere di x_5 , la coordinata che misura la distanza dalla D_3 -brana su cui è localizzato l'Universo, la gravità risulterà essenzialmente concentrata vicino alla brana stessa. In uno scenario ancor più sofisticato del modello di Randall-Sundrum, si considerano due brane, la brana SM su cui sono localizzati i campi di gauge, ed una brana "di Planck" posta ad una distanza r dalla brana SM lungo la direzione da cui dipende il warp factor. In tal modo, non solo la gravità è localizzata in quattro dimensioni, ma la metrica può produrre la gerarchia di scale in modo tale che se la fisica è alla scala di Planck sulla prima brana, una fisica alla scala del TeV venga prodotta sulla brana SM, a patto che il warp factor sia sufficientemente grande.

Anche se nulla può giustificare simili scelte, nulla può escluderle. Il brane world, in ogni variante, appare assai interessante soprattutto perchè molti aspetti, confinati alla scala di Planck ed in apparenza inaccessibili agli esperimenti, diverrebbero invece accessibili addirittura ad LHC! Naturalmente, ad LHC si è preparati per la ricerca di possibili tracce di "scenari esotici" oltre il MS.

5.6 Dove Siamo?

L'anno che verrà sarà il più eccitante che la fisica delle alte energie abbia mai vissuto. Entrerà infatti in funzione al CERN di Ginevra il collisore LHC (Large Hadron Collider). I fasci contrapposti di protoni consentiranno urti con energia nel centro di massa pari a circa 14 TeV, ad un'energia per i partoni (quark e gluoni) sicuramente più elevata di 1 TeV. Oltre alla ricerca del bosone di Higgs, ultimo anello mancante per la verifica completa del MS, LHC dovrebbe fornire i primi verdetti sulla fisica oltre il MS. Sicuramente il mistero dell'esistenza della supersimmetria, almeno nei termini richiesti dalla soluzione del problema della gerarchia, verrà svelato completamente. Inoltre, prime evidenze relative ad una sottesa struttura "di stringa" potrebbero venire dalla scoperta di risonanze di Kaluza-Klein legate a "Large Extra Dimensions" od a scenari di "brane-world" del tipo à la Randall-Sundrum. Anche la scoperta di extra bosoni vettori intermedi, se anomali, potrebbe nascondere una struttura di stringa. Di certo, se qualcuna delle idee presentate nel corso dovesse essere realizzata in Natura, essa verrà scoperta ad LHC.

Le teorie di (super)stringhe riconciliano la Meccanica Quantistica e la Relatività Generale, e sfociano in uno schema più generale, la teoria M, di cui è possibile investigare e conoscere soltanto alcuni "angoli" ma di cui si ignorano completamente i gradi di libertà fondamentali. Inoltre, a dispetto delle molte soluzioni "vicine" a contenere in modo pressochè esatto il MS,

le (super)stringhe sono poco predittive per via dell'enorme degenerazione del vuoto legata alla presenza dei "moduli", parametri non fissati da cui dipendono le grandezze fisiche. Al momento, se si esclude il ricorso al principio antropico, si può tentare uno studio statistico del "landscape" oppure si può sperare che esista un principio di selezione del vuoto, per ora purtroppo ignoto.

Le teorie di (super)stringhe, inoltre, lasciano aperte alcune delle questioni fondamentali, che investono per il vero anche la teoria dei campi, come ad esempio il problema della rottura della supersimmetria ed il problema ancor più cruciale della costante cosmologica.

Nonostante questi "insuccessi", da molti invocati per decretare un presunto fallimento delle teorie di (super)stringhe, va detto che notevoli risultati e numerosi aspetti incoraggianti suggeriscono di proseguire nelle ricerche in questa direzione. La meravigliosa struttura matematica delle teorie, unitamente ai notevoli progressi legati al chiarimento (già acquisito) di molti aspetti di teoria dei campi, dalla comprensione delle CFT bidimensionali alla corrispondenza AdS/CFT, basterebbero già per decretarne il successo. La sfida intellettuale e teorica più grande resta ovviamente quella della formulazione della gravità quantistica, dell'eventuale teoria finale e, per così dire, della comprensione della "Mente di Dio". Le future generazioni di scienziati avranno molto da chiarire e da scoprire.

Appendice A

Appendici Tecniche

A.1 Elementi di Teoria dei Gruppi

In questa Appendice vengono riassunte brevemente alcune nozioni di Teoria dei Gruppi.

Un gruppo è un insieme G dotato di una operazione interna binaria \circ che gode delle seguenti proprietà:

- associativa: $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$;
- esistenza dell'elemento neutro: $\exists e$ t.c. $g \circ e = e \circ g = g$;
- esistenza dell'inverso: $\exists g^{-1}$ t.c. $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$,

ove g, h ed f sono elementi qualsiasi nel gruppo. Un gruppo inoltre si dice abeliano se tutti gli elementi commutano, cioè se $g \circ h = h \circ g, \forall g, h \in G$. Ad esempio i numeri interi relativi Z formano un gruppo abeliano rispetto alla somma, le matrici 2×2 a coefficienti reali invertibili formano un gruppo non abeliano rispetto al prodotto matriciale.

Un gruppo si dice *discreto* se contiene un numero finito di elementi. Tra i gruppi che hanno un numero infinito di elementi, sono molto importanti i gruppi continui, quelli cioè in cui l'insieme degli elementi oltre ad avere una struttura di gruppo è anche uno spazio topologico con topologia compatibile con l'operazione di gruppo.

Assegnato un gruppo astratto, esso può essere concretamente realizzato in molti modi diversi. In particolare, se esiste un mapping degli elementi del gruppo in un insieme di matrici in modo che l'operazione di gruppo sia preservata, l'insieme di matrici si dice una rappresentazione del gruppo. La rappresentazione è fedele se tutti gli elementi distinti corrispondono a matrici distinte. La rappresentazione si dice riducibile se esiste una base in cui le matrici sono diagonali a blocchi ed i rispettivi blocchi formano a loro volta delle rappresentazioni. In caso contrario si dice irriducibile. Una rappresentazione si dice unitaria se le matrici che la compongono sono unitarie, ovvero soddisfano la relazione $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$. Le rappresentazioni unitarie sono molto importanti in meccanica Quantistica in quanto conservano la norma degli stati, vale a dire la probabilità.

A.2 Gruppi di Lie

Fra i gruppi continui, particolare rilevanza in fisica assumono i Gruppi di Lie¹. Si tratta di gruppi topologici in cui l'insieme dei punti, oltre ad essere uno spazio topologico, sia anche

¹Dal nome del matematico norvegese Marius Sophus Lie.

una varietà differenziabile. Per questo corso, sarà sufficiente pensarlo localmente isomorfo ad R^n . Allo scopo di introdurre l'argomento, si consideri un semplice esempio, quello del gruppo delle rotazioni nel piano. In R^2 , è possibile considerare il gruppo delle rotazioni. Ruotando un vettore (x, y) di un angolo θ , si ottiene un vettore (x', y') le cui componenti sono

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

L'elemento del gruppo, che prende il nome di $SO(2)$ (gruppo delle matrici 2×2 ortogonali con determinante 1) può essere identificato con

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Si osservi che in tal caso il gruppo è unidimensionale (dipende soltanto da un parametro reale) ed abeliano. Infatti $R(\theta) \circ R(\theta') = R(\theta + \theta')$, l'identità è la rotazione con angolo $\theta = 0$, $R(0)$, mentre l'elemento inverso di $R(\theta)$ è la rotazione di un angolo opposto, $R(-\theta)$. Si osservi ancora che l'elemento θ è equivalente all'elemento $\theta + 2\pi$ rendendo il gruppo compatto in quanto equivalente, come varietà, ad un cerchio. Si consideri ora lo spazio bidimensionale come complesso, il piano di Gauss, vale a dire si introduca $u = x + iy$. Una rotazione del piano è ora rappresentata dalla "matrice unidimensionale" (una fase!)

$$U(\theta) = e^{i\theta}. \quad (\text{A.3})$$

Tale gruppo è detto $U(1)$, essendo la matrice unidimensionale in eq. (A.3) unitaria (in generale $U(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$, ed $SU(N)$ è il sottogruppo delle stesse matrici con determinante uguale ad 1). Le matrici R e le matrici U soddisfano ovviamente le stesse proprietà. Dunque i due gruppi coincidono, o per dirla con i matematici, sono isomorfi: $SO(2) \sim U(1)$. Sussiste inoltre, in tal caso, la seguente importante proprietà: l'azione del gruppo può essere ottenuta come composizione di un numero molto grande di trasformazioni "infinitesime" successive. Infatti, per rotazioni di un angolo $\delta\theta$ infinitesimo, si ottiene

$$R(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta \\ -\delta\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Componendo "infinite rotazioni infinitesime" connesse all'identità si riottiene la trasformazione finita

$$R(\theta) = e^{(\theta T)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta T)^n, \quad (\text{A.5})$$

ove la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

viene detto il generatore infinitesimo del gruppo, ed è una matrice antisimmetrica.

Un discorso analogo ma assai più generale può essere ottenuto ricordando il momento angolare in Meccanica Quantistica. Si considerino infatti il gruppo delle rotazioni in R^3 , $SO(3)$, ed il gruppo $SU(2)$, delle matrici 2×2 unitarie con determinante 1. Le rotazioni in tre dimensioni formano un gruppo a tre parametri (infatti, ad esempio, una rotazione si può specificare

completamente assegnando gli angoli di Eulero, cfr. Corso Prof. A. Celletti), e le rotazioni connesse all'identità si ottengono come esponenziali nella forma²

$$R(\theta) = e^{i(\theta^k T_k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta^k T_k)^n, \quad (\text{A.7})$$

ove i θ_k , $k = 1, 2, 3$, sono i tre parametri legati agli angoli di Eulero mentre i T_k sono i tre generatori delle rotazioni intorno agli assi coordinati:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

D'altra parte, ogni matrice di $SU(2)$ è della forma

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

ove a e b sono numeri complessi e $*$ indica la complessa coniugazione, con $\det(U) = |a|^2 + |b|^2 = 1$. Si mostra facilmente che una matrice unitaria si ottiene come esponenziale di una matrice hermitiana. Una base fondamentale per le matrici 2×2 hermitiane a determinante unitario è la base delle matrici di Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

che se moltiplicate per i hanno determinante 1. La matrice U può essere meglio parametrizzata nella forma

$$U(\theta) = e^{i\sigma^k \theta_k / 2}. \quad (\text{A.11})$$

I generatori infinitesimi di un gruppo di Lie G si chiudono nell'algebra di Lie \mathcal{G} . Detti J^a i generatori, con $a = 1, \dots, \dim(\mathcal{G})$, essi generano uno spazio vettoriale che è anche un'algebra rispetto al prodotto definito dal commutatore secondo le relazioni seguenti:

$$[J^a, J^b] = i f^{abc} J^c. \quad (\text{A.12})$$

Le costanti f^{abc} , dette costanti di struttura, possono essere scelte completamente antisimmetriche per scambio di qualsiasi coppia di indici. Le matrici T_i e le matrici di Pauli $i\sigma_i/2$ sono i generatori infinitesimi di $SO(3)$ ed $SU(2)$, rispettivamente. Va osservato che esse soddisfano la medesima algebra di Lie, nella quale le costanti di struttura si possono identificare con il simbolo di Levi-Civita. Ad esempio

$$\left[\frac{\sigma^k}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \epsilon^{kjm} \frac{\sigma^m}{2}, \quad (\text{A.13})$$

dove ϵ^{jkm} vale $+1$ per tutte le permutazioni pari di (123), vale -1 per tutte le permutazioni dispari di (123) e vale 0 in tutti gli altri casi, in particolare se due degli indici sono uguali. Le

²È consuetudine, per i fisici teorici, usare la convenzione di Einstein che sottintende la somma sugli indici ripetuti. Così $a_k b^k$ significa $\sum_k a_k b^k$. Inoltre il fattore i nell'esponenziale è inserito per convenienza.

algebre di Lie di $SO(3)$ ed $SU(2)$ sono dunque isomorfe. Le matrici T_i ne sono una rappresentazione tridimensionale, le matrici di Pauli una rappresentazione bidimensionale. L'isomorfismo, tuttavia, è solo algebrico. Dal punto di vista geometrico, l'algebra di Lie è lo spazio tangente all'elemento identità nella varietà del gruppo. Per la componente connessa all'identità, anche i gruppi di Lie corrispondenti sono dunque isomorfi, ma geometricamente si può mostrare che $SU(2)$ è il ricoprimento doppio di $SO(3)$. Questo corrisponde alla proprietà ben nota in Meccanica Quantistica secondo cui gli stati possono avere momento angolare di spin semintero ma momento angolare orbitale solo intero.

In una data rappresentazione, sono molto importanti i “numeri quantici”. Essi corrispondono agli autovalori dei generatori che si possono simultaneamente diagonalizzare, che formano la cosiddetta “Sottoalgebra di Cartan”. Nel caso delle rotazioni, ad esempio, il generatore di una delle componenti del momento angolare, che corrisponde alla rotazione attorno all'asse corrispondente, è diagonale. Altri numeri quantici sono legati agli “Operatori di Casimir” della rappresentazione, gli operatori cioè che commutano con tutti i generatori infinitesimi. Nel caso delle rotazioni, l'operatore $J^2 = \sum_i J^i J^i$ è un esempio di Casimir di cui il momento angolare è il numero quantico corrispondente. Il Casimir è proprio della rappresentazione.

A.3 I Gruppi di Lorentz e Poincarè

In assenza di gravità, come noto, la geometria dello spazio-tempo è ben descritta dalla metrica di Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

che consente di scrivere la “lunghezza”³ di un quadrivettore $x^\mu = (ct, \vec{x})$ nella forma di prodotto scalare:

$$s^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^i)^2 = (ct)^2 - (x^i x^i). \quad (\text{A.15})$$

Il gruppo di Lorentz è il gruppo che preserva la “lunghezza” del quadrivettore, riflettendo i postulati della Relatività Ristretta, in particolare la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento. Se le componenti spaziali della metrica, le η_{ii} fossero positive, lo spazio-tempo sarebbe lo spazio R^4 , il quadrivettore sarebbe l'analogo in quattro dimensioni di un vettore “tridimensionale”, ed il gruppo che preserva la lunghezza del vettore sarebbe dunque il gruppo delle rotazioni $SO(4)$. Il gruppo di Lorentz è dunque il gruppo delle rotazioni con coordinata tempo complessa. Se ci si limita alle trasformazioni connesse all'identità, si possono distinguere due tipi di trasformazioni. I “boost” sono le rotazioni rispetto ad uno dei piani spazio-temporali, ovvero le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità $\beta_x = v_x/c$. Ad esempio, per il piano (01) si può scrivere

$$(x^0)' = \gamma (x^0 + \beta x^1); \quad (x^1)' = \gamma (x^1 - \beta x^0); \quad (x^2)' = x^2; \quad (x^3)' = x^3, \quad (\text{A.16})$$

³Lo spazio di Minkowski è pseudo-euclideo, quindi il prodotto scalare non è definito positivo. Un quadrivettore, se di “lunghezza” positiva, viene detto di tipo tempo, se di lunghezza negativa di tipo spazio, se di lunghezza nulla di tipo luce, riflettendo la struttura del cono di luce degli eventi.

dove $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$. Ogni boost è combinazione lineare dei tre boost lungo i tre piani spazio-temporali. Ad essi si aggiungono poi le rotazioni euclidee tra i piani spaziali, che formano il sottogruppo $SO(3)$ del gruppo di Lorentz, e sono specificate, come anticipato nell'Appendice precedente, assegnando tre angoli. Dunque il gruppo di Lorentz è un gruppo a sei parametri, i tre boosts e le tre rotazioni. È un gruppo non compatto, in quanto $0 \leq \beta_i < 1$ è un insieme aperto. L'algebra del gruppo si può ottenere come segue. I generatori infinitesimi si ottengono nello stesso modo del caso di $SO(2)$, e risultano

$$K^i = J^{0i}; \quad J^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} J_{jk} \quad , \quad (\text{A.17})$$

rispettivamente per boost e rotazioni, ove $\epsilon^{0123} = 1$ e

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = i (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \quad . \quad (\text{A.18})$$

È interessante osservare che definendo le combinazioni $M^i = K^i + iJ^i$ ed $N_i = K^i - iJ^i$, si ottengono per gli M e gli N due algebre identiche a quelle di $SU(2)$ esaminate nell'Appendice precedente. Le rappresentazioni del gruppo di Lorentz si ottengono quindi come prodotti tensoriali di rappresentazioni di $SU(2)$, le rappresentazioni dello spin in Meccanica Quantistica, e sono caratterizzate da una coppia di numeri quantici, (m, n) . Altra interessante rappresentazione del gruppo di Lorentz si ottiene attraverso operatori differenziali. Introducendo il quadri-impulso⁴ $p^\mu = (E, \mathbf{p}^i)$, esso può essere identificato come il generatore delle traslazioni ed assume la forma $p^\mu = i\partial_\mu$. Infatti la trasformazione $x^\mu \rightarrow (x^\mu)' = x^\mu + a^\mu$ si ottiene con l'azione su x^μ dell'operatore $e^{ia^\mu p_\mu}$. In tale formalismo, i generatori del gruppo di Lorentz si possono scrivere nella forma⁵

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad . \quad (\text{A.19})$$

Essi sono antisimmetrici, vale a dire soddisfano $L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu}$. Una generica trasformazione della componente del gruppo connessa all'identità è dunque data da

$$U(\omega) = e^{i\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}} \quad , \quad (\text{A.20})$$

con $\omega^{\mu\nu}$ matrice antisimmetrica dei parametri: una matrice 4×4 antisimmetrica ha $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ componenti, tante quante i parametri del gruppo di Lorentz. Una generica trasformazione di Lorentz si ottiene dalle trasformazioni connesse all'identità componendole con una delle seguenti trasformazioni discrete:

- Parità \mathcal{P} : $(x^0, x^i)' = (x^0, -x^i)$;
- Time Reversal \mathcal{T} : $(x^0, x^i)' = (-x^0, x^i)$.

Il gruppo di Poincarè si ottiene “aggiungendo” al gruppo di Lorentz le traslazioni generate dai p_μ . Gli stati di singola particella in una teoria quantistica relativistica devono essere dei vettori in una rappresentazione del gruppo di Poincarè. Essi sono dunque caratterizzati dallo spin (la rappresentazione rispetto alle rotazioni di Lorentz) e dalla massa, il numero quantico legato al Casimir P^2 del gruppo di Poincarè (si ricordi che infatti $p^2 = m^2$ è un invariante relativistico e dunque commuta con tutti i generatori del gruppo di Poincarè). In particolare,

⁴Si fa uso qui delle cosiddette unità naturali, in cui c ed \hbar sono poste uguali ad 1.

⁵Si considera qui soltanto la parte cosiddetta “orbitale” del Gruppo di Lorentz.

se la massa è positiva, lo stato di spin s ha $2s+1$ componenti, se la massa è nulla lo stato di spin s ammette 2 stati, perchè lo stato è “costretto” a muoversi alla velocità della luce e dunque solo le proiezioni dello spin nelle direzioni del moto (elicità) sono consentite. Le rappresentazioni con massa immaginaria, dette tachioni, vengono scartate.

A.4 L'Oscillatore Armonico in Meccanica Quantistica

Il sistema fisico probabilmente più studiato nel corso del XX secolo è l'oscillatore armonico, che rappresenta il prototipo di sistema esattamente risolubile grazie alla linearità dello spazio delle soluzioni. Si consideri dunque un oscillatore armonico unidimensionale. Come noto dalla meccanica classica, la funzione Hamiltoniana (l'energia) dell'oscillatore armonico è data dall'espressione

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad , \quad (\text{A.21})$$

ove p è l'impulso, m è la massa e ω la frequenza propria del sistema. A causa dell'energia potenziale quadratica nella posizione, il moto classico di energia E è confinato in una regione finita di spazio tra i punti di “inversione” del moto $x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. Nella teoria quantistica, gli stati del sistema sono “legati” ed i livelli energetici discreti. A causa del principio di indeterminazione, posizione ed impulso dell'oscillatore armonico non sono più osservabili misurabili simultaneamente. La descrizione migliore si ottiene in termini dei cosiddetti “operatori di creazione e distruzione”. Si introducano le seguenti combinazioni di posizione ed impulso:

$$a = \frac{p - im\omega x}{2m\hbar\omega}; \quad a^\dagger = \frac{p + im\omega x}{2m\hbar\omega} \quad (\text{A.22})$$

Pensando ora le osservabili impulso e posizione come operatori lineari su uno spazio di Hilbert, ed imponendo che essi soddisfino le relazioni di commutazione “canoniche”

$$[x, p] = i \hbar \quad , \quad (\text{A.23})$$

si ottengono per gli operatori a e a^\dagger le relazioni di commutazione

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad , \quad (\text{A.24})$$

mentre l'Hamiltoniana si esprime in termini degli stessi operatori nella forma

$$H = (a^\dagger a + 1/2) \hbar\omega \quad . \quad (\text{A.25})$$

Le (A.24, A.25) evidenziano come l'energia del sistema sia una quantità conservata ed osservabile. Si consideri dunque uno stato di energia E_n , vale a dire un autostato $|n\rangle$ ⁶ dell'Hamiltoniana con autovalore E_n . Ebbene, dalle relazioni precedenti si evince immediatamente che lo stato $a|v\rangle$ è un autostato dell'Hamiltoniana con autovalore $E_n - \hbar\omega$, mentre lo stato $a^\dagger|v\rangle$ è autostato dell'Hamiltoniana con autovalore $E_n + \hbar\omega$. È dunque semplice, alla luce di quanto detto, costruire lo “spettro” dell'Hamiltoniana, vale a dire l'insieme degli autovalori. Si assume che esista lo “stato fondamentale” (“vuoto” o anche “stato di minima energia”) indicato

⁶Si usa la celeberrima notazione introdotta da P.A.M. Dirac, secondo cui un “bra” $|v\rangle$ indica un vettore dello spazio di Hilbert, un “Ket” $\langle w|$ indica un vettore dello spazio duale, e la parentesi dei due (“bracket” in inglese) $\langle w|v\rangle$ ne fornisce il prodotto scalare.

con $|0\rangle$. Non esistono stati di energia più bassa quindi $|0\rangle$ deve essere annullato dall'azione di a , altrimenti $a|0\rangle$ avrebbe energia inferiore a quella del vuoto. Dunque il vuoto è definito dall'equazione

$$a|0\rangle = 0 \quad . \quad (\text{A.26})$$

Contrariamente all'intuizione naturale, il vuoto non ha energia nulla, possiede un'energia di punto zero, pari a $E_0 = 1/2\hbar\omega$ che, come noto, gioca un ruolo fondamentale. Essa rispecchia infatti da un lato l'indeterminazione nel misurare simultaneamente posizione ed impulso dell'oscillatore quantistico, dall'altro il fatto che il vuoto quantistico non sia esattamente "vuoto" ma pulluli di fluttuazioni "virtuali" che non possono essere rivelate pena la violazione del principio di indeterminazione. Definito il vuoto, gli stati "eccitati", cioè con energia $E_0 + 1, E_0 + 2, \dots, E_0 + n$ in unità $\hbar\omega$, si ottengono semplicemente agendo con l'operatore a^\dagger . Inoltre l'operatore $N = a^\dagger a$ che compare nell'Hamiltoniana conta esattamente il numero di "livelli eccitati". Per la precisione, considerato lo stato

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \quad , \quad (\text{A.27})$$

esso è un autostato normalizzato dell'Hamiltoniana, tale che

$$\begin{aligned} N|n\rangle &= n|n\rangle \\ H|n\rangle &= (n + 1/2)\hbar\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Lo spettro dell'oscillatore armonico risulta dunque additivo: ogni livello ha un'energia che si ottiene aggiungendo un "quanto" di energia $\hbar\omega$ al livello precedente. Questa è esattamente la descrizione che occorre per formulare in una teoria quantistica delle particelle elementari. Non si può infatti sperare di descrivere posizione e velocità della particella, come nel caso deterministico. Una descrizione conveniente dello stato quantico coinvolge il numero di particelle che occupano un determinato livello di energia. Se ogni "quanto" di energia $\hbar\omega$ viene effettivamente associato all'energia di una particella, l'operatore N conta esattamente il numero di particelle nello stato $|n\rangle$ (che sono n dello stesso tipo). Se si immagina che possano esservi operatori di creazione e distruzione diversi per ciascuna componente di ciascuna specie di particelle, si giunge alla descrizione cosiddetta di "spazio di Fock" dei sistemi ad un numero variabile di particelle. L'additività dello spettro fa sì che aggiungere una particella o sottrarla equivale ad alzare od abbassare l'energia del sistema di una unità discreta, un quanto. I campi quantizzati, descritti nello spazio degli impulsi, altro non sono che sistemi di molti oscillatori, essenzialmente indipendenti. L'oscillatore armonico costituisce dunque la base su cui si fonda l'intera teoria quantistica dei campi ed in parte la teoria perturbativa delle (super)stringhe.

Come noto, uno dei risultati fondamentali della teoria dei campi è la relazione fra spin e statistica. Esistono in natura due tipi di particelle: i bosoni, ben descritti da quanti che obbediscono alle relazioni di commutazione (A.24) che possono coesistere in uno stato che ne preveda un numero arbitrario (si dice che essi obbediscono alla statistica di Bose-Einstein). Esistono poi altre particelle, dette fermioni, che invece non amano molto stare insieme, obbedendo al cosiddetto principio di esclusione di Pauli: due fermioni non possono esistere nello stesso "stato quantico", vale a dire in uno stato in cui tutte le osservabili compatibili (misurabili simultaneamente) siano uguali. Tali particelle obbediscono alla statistica detta di Fermi-Dirac. Per descrivere un fermione, occorre dunque "inventare" un operatore di creazione il cui

quadrato sia nullo, un operatore nilpotente. A tal scopo, occorre e basta introdurre operatori di creazione e distruzione che siano “anticommutanti” nell’ambito del cosiddetto oscillatore armonico fermionico. Siano allora b e b^\dagger operatori che obbediscano alle relazioni

$$\{b, b^\dagger\} = b b^\dagger + b^\dagger b = 1 \quad . \quad (\text{A.29})$$

Occorre ridefinire, ovviamente, anche l’Hamiltoniana, che diviene $H = \hbar\omega(b^\dagger b - 1/2)$, ove l’operatore $N_f = b^\dagger b$ conta ora il numero di fermioni nello stato in questione. Si osservi che poichè gli operatori b anticommutano, definito il vuoto come lo stato per cui $b|0\rangle = 0$, è facile osservare che $b^\dagger|0\rangle$ è lo stato ad un fermione e che non esiste lo stato a due fermioni. Infatti $b^\dagger b^\dagger|0\rangle = -b^\dagger b^\dagger|0\rangle = 0$. Gli oscillatori anticommutanti obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Si può assumere che oggetti unidimensionali siano anticommutanti per definizione (le cosiddette variabili di Grassmann, di fondamentale importanza nella formulazione della supersimmetria nel superspazio), oppure si può utilizzare una realizzazione esplicita degli operatori come matrici. Definendo, ad esempio, $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i \sigma_2$, con σ_i le matrici di Pauli, si può rappresentare l’algebra (A.29) nella forma

$$b = \sigma_- \quad , \quad b^\dagger = \sigma_+ \quad , \quad (\text{A.30})$$

con l’Hamiltoniana che, non sorprendentemente, assume la forma di quella di un sistema a due stati di spin 1/2

$$H = \hbar\omega \sigma_3 \quad . \quad (\text{A.31})$$

A.5 Algebre di Lie e reticoli

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Algebra_di_Lie

e siti ad esso correlati.

A.6 Campi classici, Lagrangiane e Teorema di Nöther

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Noether

http://it.wikipedia.org/wiki/Lagrangiana#Lagrangiana_e_densit.C3.A0_di_Lagrangiana_in_teorica_dei_campi

e siti ad esso correlati.

A.7 Campo Scalare

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Campo_scalare

e siti ad esso correlati.

A.8 Campo Spinoriale ed Equazione di Dirac

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Dirac

http://it.wikipedia.org/wiki/Spinore_di_Dirac

http://it.wikipedia.org/wiki/Elettrodinamica_quantistica

e siti ad esso correlati.

A.9 Campo Vettoriale

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Tensore_elettromagnetico

e siti ad esso correlati.

A.10 Teorie di Gauge

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_di_gauge

e siti ad esso correlati.

A.11 Teorema di Goldstone e Meccanismo di Higgs

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Goldstone

http://it.wikipedia.org/wiki/Meccanismo_di_Higgs

e siti ad esso correlati.

A.12 Metrica del Piano e della Sfera

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Tensore_metrico

e siti ad esso correlati.

A.13 La Teoria di Kaluza-Klein

Si veda, ad esempio, il sito

http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_di_Kaluza-Klein

e siti ad esso correlati.

A.14 Abbreviazioni

Si riportano, per facilitare la consultazione, le abbreviazioni adottate nel testo.

- **CMB** - Radiazione di Fondo Cosmico.

- **GUT** - Teorie di Grande Unificazione.
- **MS** - Modello Standard.
- **MSSM** - Modello Standard Minimale Supersimmetrico.
- **Vev** - Valore di aspettazione nel vuoto.

Appendice B

Un elenco di siti internet

In questa sezione si riportano alcuni siti internet che possono essere consultati allo scopo di completare e meglio comprendere gli argomenti trattati nel Corso.

★ Il sito del Particle Data Group:

<http://pdg.lbl.gov>

★ Il sito “ufficiale” delle stringhe

<http://superstringtheory.com/>

★ Il sito del CERN

<http://www.cern.ch>

★ Il sito di LHC

<http://www.cern.ch/lhc>

★ Il sito di SLAC

<http://www.slac.stanford.edu/>

★ Il sito di Spires, dove si possono trovare molte pubblicazioni di fisica teorica

<http://www.slac.stanford.edu/spires/hep>

★ Il sito dell'INFN

<http://www.infn.it>

Capitolo 6

Riferimenti

Questa Sezione contiene una brevissima guida alla consultazione della bibliografia. Per quel che riguarda il MS ed in generale la Teoria Quantistica dei Campi , si possono consultare [1] e [2]. La Relatività Generale ed i modelli Cosmologici si possono trovare in [3]. Per i buchi neri si può anche consultare [4]. Supersimmetria e Supergravità sono discusse in [5]. Buone rassegne sulla fisica oltre il MS sono in [6]. La teoria delle (super)stringhe è descritta in [7]. Una rassegna utile sugli Orientifold è [8]. Infine, alcuni libri divulgativi interessanti sono riportati in [9].

Bibliografia

- [1] C. Itzykson and J. B. Zuber, “Quantum Field Theory,” *New York, Usa: Mcgraw-hill (1980)(International Series In Pure and Applied Physics)*;
F. Mandl and G. Shaw, “Quantum Field Theory,” *Chichester, Uk: Wiley (1984) (A Wiley-interscience Publication)*;
S. Weinberg, “The Quantum theory of fields.” 3 vol. *Cambridge, UK: Univ. Pr.*;
S. Pokorski, “Gauge Field Theories,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*;
D. Bailin and A. Love, “Introduction To Gauge Field Theory,” *Bristol, Uk: Hilger (1986) (Graduate Student Series In Physics)*;
M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,” *Reading, USA: Addison-Wesley (1995)*;
S. Coleman “Aspects of Symmetry,” *Cambridge Univ. Press (1985)*.
- [2] B. R. Martin and G. Shaw, “Particle physics,” *Chichester, UK: Wiley (1997)*;
D. H. Perkins, “Introduction To High Energy Physics,” *Addison-Wesley (1982)*.
- [3] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology,” *J. Wiley and Sons, 1972*;
R. M. Wald, “General Relativity,” *Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p*.
- [4] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large scale structure of space-time,” *Cambridge University Press, Cambridge, (1973)*.
- [5] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” *Princeton, USA: Univ. Pr. (1992)*;
P. C. West, “Introduction To Supersymmetry And Supergravity,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1986)*.
- [6] M. Dine, “Supersymmetry and string theory: Beyond the standard model,” *Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr.(2007)*;
G. G. Ross, “Grand Unified Theories,” *Reading, Usa: Benjamin/cummings (1984) (Frontiers In Physics, 60)*;
P. Langacker, “Grand Unified Theories And Proton Decay,” *Phys. Rept. 72 (1981) 185*.
- [7] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “SUPERSTRING THEORY”. 2 VOL, *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*;
J. Polchinski, “String theory.” 2 Vol. *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) .*
- [8] C. Angelantonj and A. Sagnotti, “Open strings,” *Phys. Rept. 371 (2002) 1 [Erratum-ibid. 376 (2003) 339] [arXiv:hep-th/0204089]*.

- [9] S. Hawking, "Dal Big-Bang ai Buchi Neri. Breve Storia del Tempo," *Rizzoli* (1988);
S. Weinberg, "I Primi Tre Minuti," *Mondadori* (1986);
B. R. Greene, "L' universo elegante. Superstringhe, dimensioni nascoste e la ricerca della teoria ultima," *Einaudi* (2005);
A. Balbi, "La musica del Big Bang," *Springer* (2007).
- [10] C. Rovelli, "Quantum Gravity," *Cambridge, UK: Univ. Pr.* (2004) 455 p